

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
SÉBASTIEN BERTRAND

SURFACES SOLITONNIQUES PLONGÉES DANS DES ALGÈBRES DE LIE
ASSOCIÉES AUX MODÈLES INTÉGRABLES

AVRIL 2013

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions une version de la formule d'immersion de Fokas-Gel'fand pour les surfaces solitoniques plongées dans des espaces multidimensionnels. Une technique de construction des surfaces bidimensionnelles associées aux solutions des systèmes non-linéaires intégrables est présentée. Nous montrons qu'il est possible de construire des surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie associées à trois formes de paires de Lax pour des équations différentielles ordinaires et partielles intégrables. Les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi pour ces surfaces sont des déformations infinitésimales de la représentation de courbure nulle pour ces équations. Nous concentrons ce mémoire sur la caractérisation géométrique des surfaces solitoniques pour plusieurs équations différentielles apparaissant en physique et en mathématiques telles que les équations de Sturm-Liouville, des fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass, de Sine-Gordon, de Bianchi, de Ernst et de Schrödinger non-linéaire. Pour le cas des fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass ainsi que pour l'équation de Sturm-Liouville, la fonction d'onde du problème linéaire spectral a pu être construite explicitement. Dans ce cas, nous avons pu construire leurs surfaces solitoniques (plongées dans des espaces multidimensionnels euclidiens) associées à différents types de symétries, plus particulièrement pour les symétries conformes en paramètre spectral, pour les symétries de jauge ainsi que pour diverses symétries généralisées.

Abstract

In this master thesis we investigate a version of the Fokas-Gel'fand immersion formula for solitonic surfaces immersed in multidimensional spaces. A method to construct bidimensional surfaces associated with solutions of integrable nonlinear systems is shown. We demonstrate that it is possible to construct solitonic surfaces immersed in Lie algebras associated with three forms of Lax pairs for integrable ordinary and partial differential equations. The Gauss-Mainardi-Codazzi equations for those surfaces are infinitesimal deformations of the zero curvature representation for these equations. We concentrate on the geometrical characterization of solitonic surfaces for some differential equations arising in physics and mathematics such as Sturm-Liouville, \mathcal{P} -Weierstrass and Jacobi elliptic functions, Sine-Gordon, Bianchi, Ernst and nonlinear Schrödinger equations. For the cases of \mathcal{P} -Weierstrass and Jacobi elliptic functions along with Sturm-Liouville equations, the wavefunctions of their linear spectral problem have been constructed explicitly. So we could construct their solitonic surfaces (immersed in multidimensionnal Euclidean spaces) associated with different types of symmetries, i.e. conformal symmetries in the spectral parameter, gauge symmetries and generalized symmetries.

Remerciements

Je voudrais remercier mon directeur de recherche, le professeur Alfred Michel Grundland, pour m'avoir introduit à un vaste éventail de méthodes et de concepts en physique mathématique et, sans qui, ce mémoire n'aurait pu être complété. Je tiens aussi à le remercier pour avoir nourri mon intérêt pour les mathématiques ainsi que pour la physique.

De plus, je tiens à remercier les professeurs du département de Physique de l'UQTR Louis Marchildon et Adel F. Antippa ; M. Marchildon dont la rigueur est inspirante et M. Antippa pour son dévouement et ses conseils.

J'aimerais remercier Catherine Gosselin qui m'a aidé dans le cadre de la correction du français.

Je souhaite aussi remercier le Département de Mathématiques et d'Informatique ainsi que l'Institut des Sciences Mathématiques (ISM) pour leur support financier, mais aussi pour m'avoir offert la chance d'aller suivre un cours très enrichissant à l'Université de Montréal avec le professeur Pavel Winternitz.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Table des matières	v
1 Introduction	1
1.1 Objectifs	1
1.2 Motivation	3
1.3 Bref aperçu de l'intégrabilité	4
1.4 Découverte des solitons	5
1.5 Plan du mémoire	7
2 Aperçu de la théorie des groupes et de leur classification	11
2.1 Groupes	12
2.2 Variétés et topologies	14
2.3 Groupes de Lie	18
2.4 Algèbre de Lie	20
2.4.1 Classification d'algèbres simples	25
2.4.2 Sous-algèbres de sommes directes	26
2.4.3 Sous-algèbres de sommes semi-directes	27
2.5 Groupes de transformations locales	29
2.6 Groupe de symétrie des équations différentielles	34

2.7	Réduction par symétrie des équations différentielles	48
2.8	Test de Painlevé	53

3 Symétries d'équations différentielles ordinaires et leurs surfaces solitoniques 59

3.1	Surfaces solitoniques associées aux équations différentielles ordinaires intégrables	60
3.1.1	Formule d'immersion de Sym-Tafel	63
3.1.2	Transformation de jauge	63
3.1.3	Symétries généralisées	65
3.2	Description des surfaces	67
3.2.1	Surface conformément paramétrisée	67
3.2.2	Description quaternionique des surfaces	71
3.2.3	Formule d'immersion de Enneper-Weierstrass	73
3.2.4	Métrique euclidienne et pseudo-euclidienne sur les surfaces . . .	79
3.2.5	Classification des surfaces	80
3.3	Équations différentielles ordinaires pour les équations elliptiques . . .	82
3.3.1	Paire de Lax	83
3.3.2	Fonction d'onde	85
3.3.3	Symétries des équations différentielles ordinaires associées aux intégrales elliptiques	86
3.3.4	Première forme fondamentale des surfaces	89
3.3.5	Deuxième forme fondamentale des surfaces	93
3.3.6	Courbure de Gauss, courbure moyenne et points umbiliques . .	95
3.4	Fonctions elliptiques de Jacobi	96
3.5	Fonction elliptique de \mathcal{P} -Weierstrass	100
3.6	Équations différentielles ordinaires de Painlevé	103
3.6.1	Caractérisation de l'équation P1	103
3.6.2	Propriété de l'équation P6	105
3.7	Problème de Sturm-Liouville	106

3.7.1	Équation de Riccati	111
3.7.2	Équation de Lamé	117
3.8	Conclusion	124
3.9	Perspectives futures	125
4	Symétries des équations différentielles partielles et leurs surfaces so-	
	litoniques	127
4.1	Description des surfaces	127
4.1.1	Formule d'immersion de Fokas-Gel'fand	128
4.1.2	Symétrie généralisée et le problème linéaire spectral	132
4.1.3	Formule de Sym-Tafel pour les symétries conformes selon le pa- ramètre spectral λ	136
4.1.4	Transformation de jauge de la fonction d'onde	137
4.1.5	Symétries généralisées de la représentation de courbure nulle	138
4.2	Équation de Sine-Gordon	141
4.2.1	Formule d'immersion de Sym-Tafel	141
4.2.2	Symétries généralisées	146
4.3	Équation de Sinh-Gordon	154
4.3.1	Formule d'immersion de Sym-Tafel	155
4.3.2	Symétries généralisées	157
4.4	Équation non-linéaire de Schrödinger	159
4.4.1	Formule d'immersion de Sym-Tafel	160
4.4.2	Symétries généralisées	160
4.5	Équation de Ernst de la relativité générale	162
4.5.1	Matrices potentielles dans la base $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$	163
4.5.2	Matrices potentielles dans la base $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	167
4.6	Système de Bianchi	170
4.6.1	Formule d'immersion de Sym-Tafel	171
4.6.2	Symétries généralisées	172
5	Lois de conservation et opérateur d'homotopie : Application à l'équa-	

tion de Sine-Gordon	176
5.1 Théorème de Noether	177
5.2 Opérateur d'homotopie	181
5.3 Application à l'équation de Sine-Gordon	192
5.4 Conclusions et Perspectives	198
6 Conclusion	201
6.1 Certaines perspectives futures	204
A Annexe	206
A.1 Matrices de Pauli et éléments de base pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$	206
A.2 Systèmes Hamiltoniens	207
A.3 Structure poissonnienne et transformation canonique	210
A.4 Équation de Riccati	211
A.5 Douze fonctions elliptiques de Jacobi	212
A.5.1 Propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi	216
A.5.2 Théorème d'addition des fonctions elliptiques de Jacobi	217
A.6 Théorème d'addition de la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass	219
Bibliographie	221

Table des figures

2.1	Variétés et applications	16
2.2	Projection de la topologie de la sphère en deux dimensions	17
2.3	Applications lisses	18
2.4	Génération de nouveaux graphes via la multiplication par le groupe. . .	35
3.1	Surface de la symétrie généralisée pour la fonction $cn(x, k)$ avec $g > 0$ $k = 0.2$ et $\lambda = 1.2$	98
3.2	Surface d'immersion de Sym-Tafel pour la fonction $cn(x, k)$ avec $g < 0$ $k = 0.8$ et $\lambda = 0.5$	99
3.3	Surface de la symétrie généralisée pour la fonction $dn(x, k)$ avec $g > 0$ $k = 0.87$ et $\lambda = 0.9$	99
3.4	Surface d'immersion de Sym-Tafel pour la fonction $dn(x, k)$ avec $g < 0$ $k = 0.5$ et $\lambda = 1.2$	100
3.5	La surface pour la formule d'immersion de Sym-Tafel avec les para- mètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$	102
3.6	La surface pour une translation en x avec les paramètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$	102
3.7	La surface pour la formule d'immersion de Sym-Tafel avec les para- mètres $a = b = 1$ et $g_1 = g_2 = 0$	120
3.8	La surface pour la jauge avec les paramètres $m = 1$, $g_1 = g_2 = 0$ et $a = b = 1$	121
3.9	La surface pour la symétrie généralisée avec les paramètres $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 1$ et $a = b = 1$	122

3.10 La surface pour la symétrie généralisée avec les paramètres $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 10$ et $a = -1 = -b$	122
---	-----

Liste des tableaux

2.1	Table des commutateurs de l'algèbre de symétrie de l'équation de chaleur	25
2.2	Groupes de symétrie et leur interprétation physique pour l'équation de chaleur.	45
2.3	Table de commutation de l'algèbre de Lie pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili cylindrique.	49
3.1	Certaines fonctions elliptiques de Jacobi	96
4.1	Comparaison entre les formes fondamentales provenant de la formule d'immersion de Sym-Tafel et des symétries généralisées.	152
5.1	Quelques exemples de lois de conservation pour Sine-Gordon	195
A.1	Solutions des équations différentielles elliptiques associées aux fonctions de Jacobi (elliptiques)	213

Chapitre 1

Introduction

*The book of nature is written in
the language of mathematics.*

—Galileo Galilei

1.1 Objectifs

L'objectif de ce mémoire est d'utiliser une nouvelle version de la formule d'immersion pour les surfaces solitoniques plongées dans des espaces multidimensionnels (isomorphes à des algèbres de Lie). Cette formule d'immersion a été proposée récemment par Fokas-Gel'fand [38,39] (les conditions nécessaires), puis reformulée avec les conditions suffisantes [49,51] pour construire des surfaces bidimensionnelles en terme d'invariance des symétries généralisées, des symétries de jauge [23,36] et des symétries conformes en terme du paramètre spectral (la formule d'immersion de Sym-Tafel [88,89]). Cette approche permet d'établir une transformation bijective entre ces symétries pour les modèles intégrables et leurs surfaces correspondantes plongées dans

une algèbre de Lie. Il est démontré dans ce mémoire qu'à chaque symétrie commune d'équation différentielle partielle (EDP) ou d'équation différentielle ordinaire (EDO) intégrables et de son problème linéaire spectral, il est possible de construire des surfaces solitoniques pour lesquelles les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi sont équivalentes aux déformations infinitésimales de la représentation de courbure nulle de leur problème linéaire spectral correspondant. L'énoncé inverse a aussi été démontré. Si la fonction d'immersion d'une surface solitonique plongée dans l'algèbre de Lie est donnée alors il est possible de déterminer toutes les symétries généralisées de la courbure nulle (équivalente à l'équation initiale) et de son problème linéaire spectral correspondant. Ces considérations théoriques sont illustrées par plusieurs surfaces associées aux modèles intégrables ; soit les équations différentielles partielles Sine-Gordon, Sinh-Gordon, Ernst, Schrödinger non-linéaire ainsi que Bianchi et soit les équations différentielles ordinaires de Painlevé, Jacobi elliptiques, \mathcal{P} -Weierstrass elliptique, Sturm-Liouville ainsi que Riccati. Nous établissons pour ces modèles les équations structurelles, plus particulièrement les deux premières formes fondamentales ainsi que les relations de Gauss-Weingarten et Gauss-Mainardi-Codazzi, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de même que la fonctionnelle de Willmore. Ces éléments sont exprimés en terme des fonctions du modèle considéré. La procédure proposée de construction des surfaces correspondant à des solitons de ces systèmes mène à divers types de surfaces qui seront discutés dans ce mémoire.

Dans ce mémoire, nous avons plus particulièrement construit plusieurs nouvelles surfaces solitoniques pour les équations différentielles elliptiques associées aux fonctions de Jacobi. De nouvelles surfaces pour les fonctions cn et dn , avec sn qui était déjà connue dans la littérature [50], ont été présentées. Ces trois fonctions forment la base des douze fonctions de Jacobi puisqu'elles permettent de générer les neuf autres. Nous avons aussi présenté de nouvelles surfaces associées à la fonction elliptique de \mathcal{P} -Weierstrass. De plus, nous avons construit les surfaces pour l'équations de Sturm-Liouville et nous avons présenté les surfaces pour le cas du potentiel de Lamé pour les trois types de symétrie, c'est-à-dire les symétries conformes selon le paramètre

spectral, les symétries de jauge ainsi que les symétries généralisées. Nous avons trouvé une nouvelle paire de Lax appartenant à l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, puis nous avons construit ses surfaces associées. Finalement, nous avons solutionné l'équation de récurrence de l'équation de Sine-Gordon pour les ordres 0, 1 et 2 ce qui nous a permis d'obtenir des symétries généralisées non-triviales et nous avons construit les surfaces associées et caractérisé les surfaces.

1.2 Motivation

L'intérêt d'étudier les surfaces solitoniques des modèles intégrables est motivé par diverses applications en physique dans les domaines suivants : gravité bidimensionnelle [47], théorie des champs quantiques, théorie des cordes (bosoniques [65,80,81] et supercordes [15]) ; en physique statistique : modèle de Ising [73], théorie des champs de jauge (par exemple réduction des champs de Yang-Mills qui sont leur propre espace dual vers le modèle de Ernst pour les ondes gravitationnelles cylindriques [1,8]), transition de phase (agrandissement d'un réseau cristallin, déformation de membrane, ondes de surface, etc. [32,76]) ; en dynamique des fluides : le mouvement des frontières entre les régions de différentes densités et viscosités [20].

En biologie et en biochimie, les surfaces jouent un rôle essentiel dans plusieurs applications des phénomènes non-linéaires pour l'étude des membranes biologiques et des vésicules ; par exemple pour les longues molécules protéïniques [33,70,79], le modèle des membranes Canham-Helfrich [68]. Ces modèles macroscopiques peuvent découler de modèles microscopiques et permettent d'expliquer les propriétés de base et les formes à l'équilibre pour les membranes biologiques et les interfaces des liquides [86].

En mathématiques, l'intérêt porte sur la classification pour obtenir une liste des

surfaces solitoniques associées aux modèles intégrables aussi complète que possible, d'identifier parmi elles les cas connus, incluant les cas oubliés depuis longtemps, de découvrir de nouvelles classes de surfaces intégrables associées aux nouveaux systèmes intégrables, par exemple pour les équations de type Painlevé, de discuter de leur structure de singularités associées aux équations de Painlevé ainsi que comment les singularités se manifestent sur les surfaces.

1.3 Bref aperçu de l'intégrabilité

La notion de système intégrable provient du contexte de la mécanique classique pour les équations du mouvement qui peuvent être résolues par quadrature. Dans cette branche de la physique, un système mécanique est décrit par $2n$ coordonnées, p_i , q_i , $i = 1, \dots, n$ et l'évolution de ce système est donnée par les équations du mouvement

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $H = H(p_i, q_i)$ est l'Hamiltonien [13]. Il a été démontré que ce type de système mécanique a n fonctions en involution¹ et indépendantes au sens qu'elles ont des gradients linéairement indépendants, et tel que H est l'une d'elles. De plus, une fonction f est dite la première intégrale du système si f et H sont en involution. La théorie moderne des systèmes intégrables a considérablement augmenté les classes exactement résolubles. Ceci a permis d'explorer de nouveaux phénomènes physiques tel que les solitons et les « breathers ».

En 1968, Lax [69] a introduit le concept de paire de Lax pour l'équation Korteweg-de-Vries (KdV) pour construire des solutions exactes par la méthode de diffusion inverse [5]. L'équation de KdV était considérée comme la condition de compatibilité d'une paire d'opérateurs linéaires commutants. De façon plus générale, la notion de

1. Deux fonctions f et g sont dites d'involution si leur crochet de Poisson est nul. (Voir l'Annexe A.3 sur la structure de Poisson.)

paire de Lax permet une autre représentation des équations du mouvement sous la forme

$$\partial_t L = [M, L], \quad (1.1)$$

où les matrices dépendent des variables dynamiques et d'un paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{C}$. Il est remarquable que l'équation de Lax soit une équation d'évolution isospectrale pour la matrice de Lax L . L'intégrale du système du mouvement apparaît alors comme les valeurs propres de l'opérateur linéaire L . Toutefois, il n'y a pas de méthode systématique pour établir l'existence d'une paire de Lax avec un paramètre spectral même si le système est intégrable ou si une paire de Lax est connue explicitement sans son paramètre spectral.

En 1972, Zakharov et Shabat [100] ont montré que la méthode fonctionnait aussi pour une autre équation d'évolution non-linéaire, c'est-à-dire l'équation non-linéaire de Schrödinger. En utilisant ces résultats, Ablowitz et al. [3,4] ont étendu la méthode de diffusion inverse vers les systèmes matriciels et ont trouvé de nouvelles équations qui peuvent être résolues par cette méthode. Un exemple d'équation est l'équation de Kadomtsev-Petviashvili, qui est en fait une version de KdV en 2+1 dimensions.

1.4 Découverte des solitons

Le phénomène des solitons a été observé pour la première fois en 1834 par J. Scott Russell [85]² :

« J'étais en train d'observer le mouvement d'un bateau qui était rapidement tiré dans un canal étroit par une paire de chevaux quand le bateau s'est soudainement arrêté contrairement à la masse d'eau dans le canal qu'il avait mise en mouvement ; elle s'est accumulée à la proue du bateau dans un état violent d'agitation, puis l'a laissée soudainement derrière elle, en

2. Traduction libre

houlant de l'avant avec une grande vitesse, en assumant la forme d'une large élévation solitaire, un volume d'eau bien défini, lisse et arrondi, qui continua sa course tout le long du canal apparemment sans changer sa forme ou diminuer sa vitesse. [...] Telle, dans le mois d'août de 1834, a été ma première chance d'entrevue avec ce singulier et beau phénomène, [un soliton]... »

C'est en 1895 que Korteweg et de Vries ont dérivé l'équation KdV [66]

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$$

le modèle de la propagation d'une onde d'eau dans un canal peu profond. Ils ont obtenu des solutions sous la forme d'onde stationnaire qui ont la forme

$$u(x, t) = 2c^2 \operatorname{sech}^2(c(x + c^2 t) + d), \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'une élévation solitaire de hauteur $2c^2$ se déplaçant à une vitesse c^2 vers la gauche. Il est à noter que les ondes avec de plus petites amplitudes voyagent moins rapidement que celles à grandes amplitudes.

La théorie moderne des solitons a commencé avec l'étude numérique des interactions d'ondes solitaires pour l'équation de KdV par Zabusky et Kruskal [97] où ils ont inventé le nom soliton pour décrire ces ondes qui agissent comme des particules et qui se collisionnent sans perdre leur forme. Ceci a mené aux solutions multisolitoniques exactes et la méthode de diffusion inverse.

L'existence de solutions solitoniques de l'équation non-linéaire de Schrödinger a été prouvée par Zakharov et Shabat [99] en utilisant la transformation de diffusion inverse et pour les solutions à N solitons par les transformations de Darboux [72], la méthode bilinéaire de Hirota [21,58,82] et les techniques Wronskiennes [41,42,77]. La méthode d'Hirota est basée sur une transformation de l'équation de départ vers une équation bilinéaire, alors les multisolitons sont exprimés sous la forme de polynômes de fonctions exponentielles. Pour les techniques Wronskiennes, cette méthode formule les

solutions solitoniques en terme du déterminant du Wronskien de N fonctions. Cette méthode permet une vérification assez directe que les fonctions obtenues satisfont l'équation différentielle.

Une technique de construction des surfaces bidimensionnelles associées aux solitons du système intégrable (pour les équations différentielles partielles non-linéaires et les équations différentielles ordinaires non-linéaires) qui peut être écrit sous la forme de la courbure nulle sera présentée. Il sera démontré qu'il est possible de construire des surfaces solitoniques pour lesquelles les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi sont équivalentes à des déformations infinitésimales de la représentation de courbure nulle pour les équations considérées.

1.5 Plan du mémoire

Le mémoire est organisé de la façon suivante. Dans le Chapitre 2, nous donnons un aperçu général de la théorie des groupes et de leur classification. Pour ce faire, nous commençons par introduire le concept de groupes et de sous-groupes tout en donnant des exemples bien connus. Par la suite, nous introduisons le concept d'espace topologique (en général et de Hausdorff), d'application et de variété différentiable. La section 2.3 est consacrée au groupe de Lie tandis que la section 2.4 amène le concept d'algèbre de Lie ainsi que les éléments, tels que les sommes directe et semi-directe, le centralisateur, le normalisateur, le radical, le nilradical, etc, permettant de les classer. Cette section donne comme exemple la classification de l'algèbre des symétries de l'équation de chaleur puis décrit la procédure pour classer les algèbres : le twist de Goursat pour les algèbres twisted et non-twisted et les algèbres splitting et non-splitting. À la section suivante, nous introduisons le concept de groupe local de transformation. La section 2.6 discute des groupes de symétrie associés aux équations différentielles. Nous y décrivons la déformation des graphes par des éléments du

groupe, la méthode des prolongations des champs de vecteurs dans l'espace de Jet où nous devons redéfinir la dérivée totale et introduire l'opérateur prolongation d'ordre n , puis nous utilisons le critère de symétrie pour obtenir le groupe de symétries du système d'équations différentielles et son algèbre correspondante. Cette section présente beaucoup d'exemples, tels que les symétries de l'équation de chaleur et des équations de Navier-Stokes. La section 2.7 est entièrement consacrée à la réduction par symétrie des équations différentielles qui permet d'obtenir des solutions particulières de ces équations où nous donnons la procédure et nous l'appliquons à l'équation de Kadomtsev-Petviashvili. Dans la dernière section de ce chapitre, nous traitons de l'intégrabilité au sens de Painlevé. Pour ce faire, nous discutons des conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle possède la propriété de Painlevé. Nous nous attardons plus particulièrement sur le test de Painlevé et nous l'appliquons, à titre d'exemple, à l'équation différentielle ordinaire de Painlevé P1 et à l'équation de Sine-Gordon.

Le Chapitre 3 se concentre sur les surfaces solitoniques associées aux équations différentielles ordinaires. La section 3.1 traite de la formule d'immersion de Fokas-Gel'fand telle que les surfaces peuvent être construites via trois déformations infinitésimales, les symétries spectrales (ou la formule d'immersion de Sym-Tafel), les transformations de jauge et les symétries généralisées. Dans la section suivante, nous introduisons certains concepts de base de géométrie différentielle, soit les équations de Gauss-Weingarten et Gauss-Mainardi-Codazzi, la première et la deuxième formes fondamentales et le repère mobile, les courbures moyenne et de Gauss ainsi que les points umbiliques de la surface. Nous donnons par la suite une description quaternionique des surfaces puis nous introduisons la formule d'immersion d'Ennerper-Weierstrass [37,93]. Nous terminons cette section par l'introduction d'une métrique pseudo-euclidienne donnée par la forme de Killing et par la classification des surfaces invariantes présentées par Bobenko [18]. À la section 3.3, nous introduisons les équations différentielles elliptiques. Pour l'étude de ces équations, nous construisons une paire de Lax dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dont la représentation de la courbure nulle est équivalente à

l'équation différentielle de départ. Ensuite, nous trouvons une solution au problème linéaire spectral et nous étudions certaines symétries généralisées de notre équation de départ. Nous caractérisons notre surface via les formes fondamentales, les courbures et les points umbiliques. Dans la section 3.4, nous considérons le cas des fonctions elliptiques de Jacobi où nous donnons certaines propriétés et où nous construisons des surfaces pour les fonctions elliptiques cn et dn de Jacobi. La section 3.5 considère les fonctions elliptiques de \mathcal{P} -Weierstrass où nous donnons quelques propriétés associées aux surfaces intégrables et où nous construisons certaines surfaces solitoniques. La section 3.6 est consacrée à la caractérisation des équations différentielles de Painlevé P1 où nous donnons la paire de Lax et où nous étudions la formule d'immersion de Sym-Tafel, puis nous donnons quelques propriétés de Painlevé P6. Nous consacrons la section 3.7 à l'étude des surfaces associées au problème de Sturm-Liouville. Dans cette section, nous construisons une paire de Lax dans l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et nous solutionnons son problème linéaire spectral pour un potentiel arbitraire. Nous considérons un cas particulier de l'équation de Riccati et nous la transformons pour retrouver l'équation de Sturm-Liouville et donc avoir sa paire de Lax associée. Nous étudions également l'équation de Lamé qui est un potentiel particulier de l'équation de Sturm-Liouville et nous construisons des surfaces solitoniques pour les symétries spectrales, une transformation de jauge et pour quelques symétries généralisées. Finalement, nous étudions dans cette section la caractérisation de la surface pour la transformation de jauge. À la fin de ce chapitre, nous effectuons un résumé des conclusions et des perspectives futures rattachées à ce chapitre.

Le Chapitre 4 se concentre sur l'étude des équations différentielles partielles via leurs symétries et la surface solitonique associée. Ce chapitre commence par donner une description des surfaces, c'est-à-dire que nous expliquons en détail la formule d'immersion de Fokas-Gel'fand. Pour ce faire, dans un premier temps, nous introduisons la notion de dérivée de Fréchet puis nous considérons une déformation infinitésimale et nous en étudions les conséquences différentielles et les conséquences pour la surface construite. Nous étudions plus particulièrement les déformations associées aux symé-

tries conformes selon le paramètre spectral, aux symétries de jauge ainsi qu'aux symétries généralisées. La section suivante traite exclusivement de l'équation bien connue de Sine-Gordon où sa paire de Lax prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Dans cette section, nous trouvons les deux premières formes fondamentales, les courbures moyennes et de Gauss pour la formule d'immersion de Sym-Tafel et pour les symétries généralisées. Nous obtenons aussi des symétries non-triviales pour cette équation. Par la suite, à la section suivante, nous traitons de l'équation de Sinh-Gordon où nous comparons les résultats obtenus pour Sine-Gordon avec ceux de Sinh-Gordon. Dans la section 4.4, nous étudions l'équation non-linéaire de Schrödinger via ses formes fondamentales et ses courbures moyennes et de Gauss à la fois pour les symétries conformes selon le paramètre spectral et selon les symétries généralisées. De plus, à la section 4.5, nous étudions l'équation de Ernst de la relativité générale dans l'algèbre $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ et également dans l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. La section suivante est consacrée à l'équation de Bianchi.

Pour ce qui est du chapitre 5, nous introduisons le concept de loi de conservation et l'opérateur d'homotopie. Nous commençons par introduire le théorème de Noether pour sa première formulation ainsi que pour sa deuxième formulation. Toutefois, cette méthode est longue et fastidieuse, alors il est utile d'introduire l'opérateur d'homotopie qui permet d'utiliser les symétries de changement d'échelle qui sont beaucoup plus faciles à trouver. Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs exemples tels que KdV, SWW ainsi que Sine-Gordon que nous étudions en détail.

Finalement, l'annexe sert à éclaircir certaines notions et définitions concernant les systèmes intégrables.

Chapitre 2

Aperçu de la théorie des groupes et de leur classification

Ce chapitre est inspiré de la littérature en général, néanmoins beaucoup de résultats proviennent du livre de Peter Olver [78]. Nous tentons ici de donner un léger aperçu de la théorie des groupes et de leur classification principalement via des définitions, des théorèmes et des exemples. Dans la première section, nous définissons ce qu'est un groupe pour permettre aux lecteurs de se familiariser avec le concept si ce n'était pas déjà le cas. Par la suite, nous introduisons le concept de variété et d'application dans la section 2.2. À la section 2.3, nous introduisons le concept de groupe de Lie. Il est à noter que ce sera les groupes de Lie qui seront principalement utilisés tout le long de ce mémoire. De plus, il nous faut définir ce qu'est une algèbre de Lie, soit le générateur infinitésimal du groupe. Dans cette section, nous définissons certaines propriétés qui permettent de classer ces algèbres et donc le groupe de Lie associé. Nous décrivons aussi dans cette section comment effectuer la méthode de Goursat [44] pour les sous-algèbres dites splittings ou non-splittings. La connaissance des groupes de transformation locale, discutés dans la section 2.5, est nécessaire à la bonne compréhension des groupes de symétries des équations différentielles qui sont

expliqués dans la section 2.6. Il est à noter que cette section et la suivante sont en fait un résumé du livre [78]. En ce qui a trait au groupe de symétrie des équations différentielles, nous expliquons la méthode de la prolongation qui permet de trouver toutes les symétries continues de l'équation associée. Nous utilisons entre autres l'équation de chaleur ainsi que le système d'équations de Navier-Stokes pour illustrer la méthode. La section 2.7 traitant de la réduction par symétrie est un exemple de l'utilité de la théorie des groupes. En effet, la réduction permet d'obtenir des solutions non-triviales à des équations différentielles autant ordinaires que partielles comme nous avons fait dans cette section pour l'équation de Kadomstev-Petviashvili cylindrique. Nous terminons ce chapitre sur le test de Painlevé qui est la condition nécessaire à ce que l'équation (EDP ou EDO) soit intégrable en se basant sur [26]. Nous effectuons le test de Painlevé sur la première transcendante de Painlevé dans le cas des EDO et sur l'équation de Sine-Gordon pour le cas des EDP à titre d'exemple.

2.1 Groupes

Définition 2.1. *Un groupe est un ensemble G avec une loi de multiplication*

$$G \times G \mapsto G : (g, h) \mapsto g \circ h$$

qui obéit aux lois suivantes :

1. *Associativité :*

$$g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k \quad \forall \quad g, h, k \in G.$$

2. *Élément identité :*

Il existe un élément neutre $e \in G$ qui doit être unique tel que

$$g \circ e = e \circ g = g \quad \forall \quad g \in G.$$

3. Inverse :

Il existe un inverse $h \in G$ unique pour chaque $g \in G$ tel que

$$g \circ h = h \circ g = e \quad \text{où } h = g^{-1}.$$

Définition 2.2. Un groupe est dit abélien, ou commutatif, si

$$g \circ h = h \circ g \quad \forall h, g \in G.$$

Exemple 2.1 : Soit $(\mathbb{R}, +)$, les nombres réels sous l'action de l'addition forment un groupe. L'identité est 0 et l'inverse de $r \in \mathbb{R}$ est $-r \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2 : Le groupe des permutations. Soit S_n , l'ensemble des permutations des nombres $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Une permutation de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ est une bijection.

$$\sigma : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Les éléments $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ sont simplement les éléments originaux $\{1, 2, \dots, n\}$ placés dans un ordre différent. Au total, l'ensemble S_n contient $n!$ éléments. S_n est un groupe sous la composition de permutations. En effet, l'élément identité de S_n est simplement la permutation identité

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(2) = 2, \quad \dots, \quad \sigma(n) = n.$$

La permutation inverse est construite simplement en renversant les différentes opérations de G . C'est que, pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \exists N_k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tel que $\sigma(N_k) = k$ (puisque que σ est surjectif). De plus, N_k est unique puisque σ est injectif. Par conséquent, l'inverse de σ est défini par

$$\sigma^{-1} : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ par } k \mapsto N_k.$$

L'associativité découle de l'associativité de la composition de fonctions :

$$\begin{aligned} [(\sigma \circ \tau) \circ \omega](k) &= (\sigma \circ \tau)(\omega(k)), \\ &= \sigma[\tau(\omega(k))], \\ &= \sigma[(\tau \circ \omega)(k)], \\ &= [\sigma \circ (\tau \circ \omega)](k) \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Alors, S_n est un groupe.

Exemple 2.3 : L'ensemble des matrices $n \times n$ réelles (ou complexes) non-singulières forme un groupe sous l'action de la multiplication matricielle, que nous appelons $GL(n, \mathbb{R})$ (ou $GL(n, \mathbb{C})$), le groupe général linéaire. Voici quelques groupes fréquemment rencontrés,

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\},$	Général linéaire réel,
$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det A \neq 0\},$	Général linéaire complexe,
$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 1\},$	Spécial linéaire réel,
$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = I\},$	Orthogonal,
$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^\dagger A = I\},$	Unitaire,
$SU(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^\dagger A = I, \det(A) = 1\},$	Spécial unitaire.

Définition 2.3. Un sous-ensemble H d'un groupe G est appelé sous-groupe s'il est lui-même un groupe sous l'opération agissant sur G .

Exemple 2.4 : $SL(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$.

Définition 2.4. Si H est un sous-groupe du groupe G , alors $\forall x \in G$, nous définissons

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\},$$

que nous appelons le conjugué de H par x . Si

$$xHx^{-1} = H \quad \forall x \in G$$

alors H est appelé un sous-groupe normal de G .

2.2 Variétés et topologies

Définition 2.5. Un espace topologique (X, τ) est un ensemble X avec une classe τ de sous-ensembles de X défini de la façon suivante :

1. L'ensemble vide \emptyset et l'espace entier X appartiennent à τ .
2. Toute intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ .
3. Toute union d'éléments de τ est un élément de τ .

La classe τ est appelée la topologie sur X et ses éléments sont appelés des ouverts. Un sous-ensemble de X est dit fermé si son complément dans X est ouvert. La fermeture \bar{S} d'un ensemble S est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant S .

Exemple 2.5 : Si $X = \{a, b, c, d\}$, alors

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \dots, \{a, b, c\}, \dots, \{a, b, c, d\}\}$$

est une topologie sur X .

Définition 2.6. Un espace topologique est dit de Hausdorff si pour tout $p, q \in X$ tels que $p \neq q$, il existe des ensembles ouverts $S_p, S_q \in \tau$, tels que $p \in S_p, q \in S_q$ et $S_p \cap S_q = \emptyset$.

Exemple 2.6 : Topologie de Hausdorff. Dans l'espace \mathbb{R}^2 , considérons tous les disques ouverts de la forme

$$B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \epsilon\},$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^2$ est un point fixé et $\epsilon > 0$ est un nombre réel et positif. La topologie est définie d'une telle façon que les ensembles ouverts consistent en toutes unions et toutes intersections finies du disque ouvert dans \mathbb{R}^2 . Cette topologie est clairement de Hausdorff.

Définition 2.7. Une application $\phi : (X, \tau) \mapsto (Y, u)$ d'un espace topologique à l'autre est dite continue si l'image inverse (sous ϕ) d'un ensemble ouvert quelconque de Y sous u est un ensemble ouvert de X sous τ .

Définition 2.8. Une variété M différentiable de n dimensions est un espace topologique de Hausdorff avec une collection d'applications (système de coordonnées)

$$\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tels que

1. Chaque application ϕ_i est une bijection d'un ensemble ouvert u_i de M vers un ensemble ouvert $\phi_i(u_i)$ de \mathbb{R}^n .
2. L'union de tous les ensembles u_i est l'espace M .
3. Sur n'importe quelle intersection $u_i \cap u_j$, l'application

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(u_i \cap u_j) \rightarrow \phi_i(u_i \cap u_j)$$

est une application différentiable (C^∞) de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n .

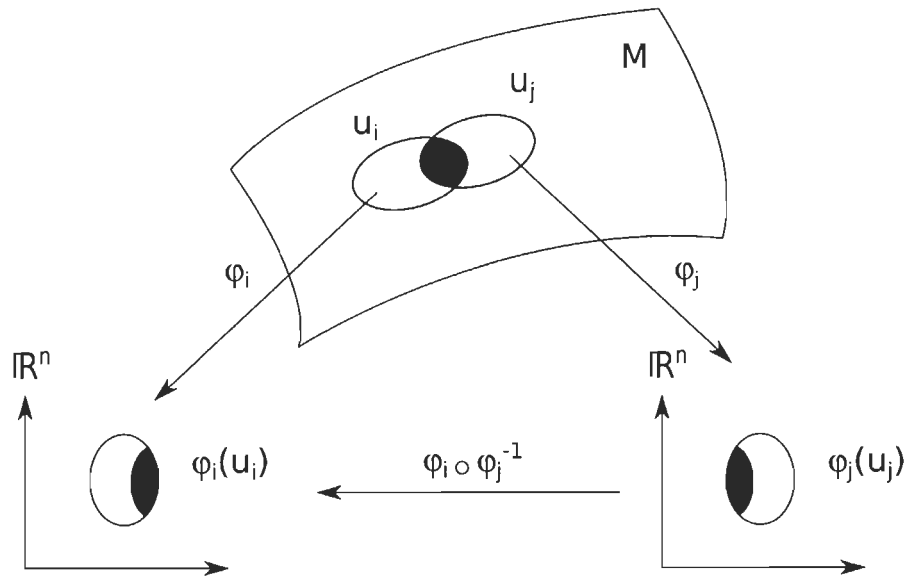


FIGURE 2.1 – Variétés et applications

Les variétés sont utiles parce qu'elles nous permettent de généraliser le calcul différentiel et les autres concepts de la géométrie non-plane. Localement, la structure est toujours plane.

Exemple 2.7 : Topologie de la sphère de rayon 1.

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Il s'agit d'une variété non triviale de dimension 2. Aucun système de coordonnées ne peut couvrir entièrement la sphère, alors nous prenons les ensembles ouverts

$$u_1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}, \quad u_2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$$

en enlevant les pôles « Nord » et « Sud » respectivement. Définissons les systèmes de coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_1 : u_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \phi_1(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \\ \phi_2 : u_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \phi_2(x, y, z) &= \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right). \end{aligned}$$

Les systèmes de coordonnées ϕ_1 et ϕ_2 correspondent à une projection stéréographique au travers des « pôles Nord et Sud » respectivement.

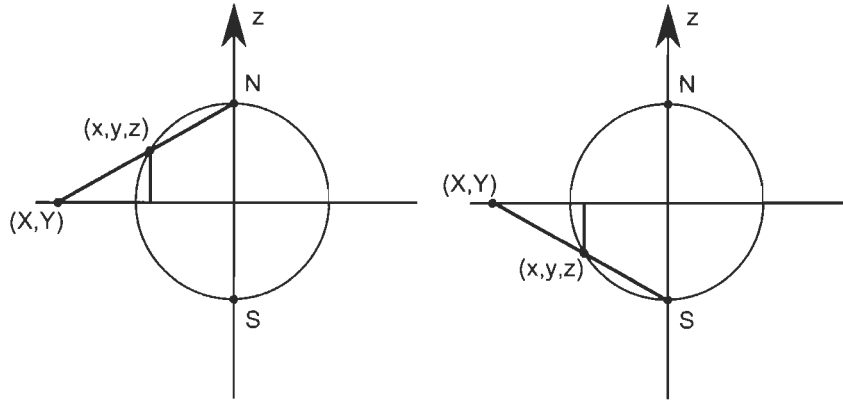


FIGURE 2.2 – Projection de la topologie de la sphère en deux dimensions

Définition 2.9. Si M et N sont deux variétés de dimensions m et n respectivement, alors une application $F : M \rightarrow N$ est dite lisse si pour tout système de coordonnées $\phi_i : u_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ dans M et pour tout système de coordonnées $\psi_j : v_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans N , l'application

$$\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(u_i) \in \mathbb{R}^m \rightarrow \psi_j(v_j) \in \mathbb{R}^n$$

est C^∞ comme application \mathbb{R}^m vers \mathbb{R}^n .

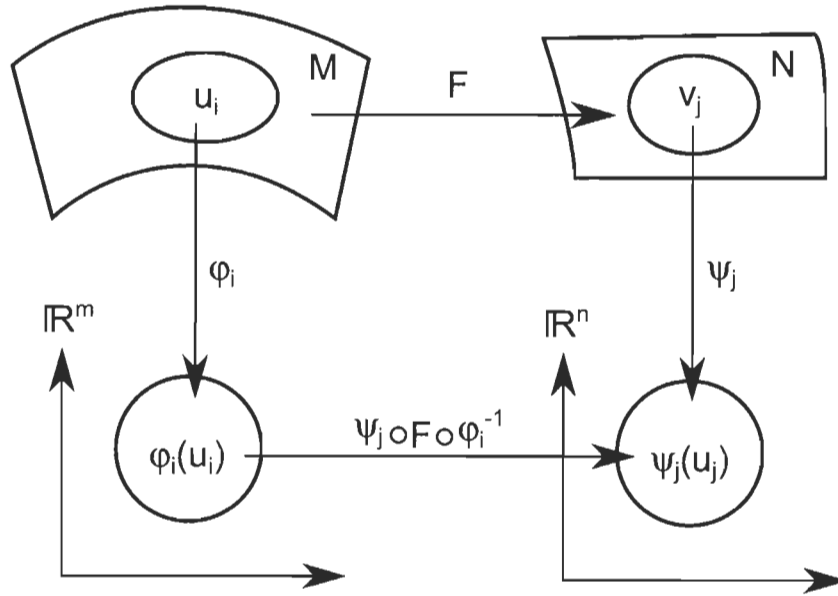


FIGURE 2.3 – Applications lisses

2.3 Groupes de Lie

Définition 2.10. *Un groupe de Lie est un groupe qui possède aussi la structure d'une variété différentiable, où l'opération de groupe*

$$G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \circ h$$

et l'application inverse

$$G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$$

sont des applications lisses.

Exemple 2.8 : Le groupe $G = \mathbb{R}^n$ sous l'addition est un groupe de Lie. En effet, les opérations

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto x + y$$

et

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto -x$$

sont lisses.

Exemple 2.9 : Le groupe $SO(2)$.

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

C'est un groupe de Lie puisqu'il est associé avec la variété S^1 de dimension 1, et l'addition des angles et $\theta \mapsto -\theta$ sont toutes des opérations différentiables.

Définition 2.11. Une variété M est connexe si elle ne peut être divisée en deux parties non vides, M_1 et M_2 , telles que $\bar{M}_1 \cap M_2$ et $M_1 \cap \bar{M}_2$ sont toutes les deux vides, où M_i est une fermeture de M_j .

Proposition 2.1. Si G est un groupe de Lie, alors la composante connexe de G contenant l'identité est un sous-groupe normal de G .

Exemple 2.10 : Le groupe $O(3)$. Le groupe de Lie $O(3)$ a deux composantes connexes :

1. La composante connexe à l'identité contient toutes les matrices orthogonales ($\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$) avec un déterminant de 1. Cette composante est un sous-groupe de $O(3)$ et est appelée $SO(3)$, le groupe spécial orthogonal qui correspond aux rotations en trois dimensions.
2. La composante qui n'est pas connexe à l'identité contient toutes les matrices orthogonales avec un déterminant de -1 . Cette composante correspond aux rotations augmentées d'une réflexion (opération discrète). Ce n'est pas un sous-groupe de $O(3)$.

$$A \in O(3) \text{ et } \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A), T : A \rightarrow -A.$$

Définition 2.12. Un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G est un sous-groupe de G qui est lui-même un groupe de Lie et où la transformation de l'identité

$$id : H \rightarrow G$$

est lisse.

2.4 Algèbre de Lie

Définition 2.13. Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un espace vectoriel réel ou complexe avec une loi de multiplication interne, $[X, Y]$, appelée crochet de Lie qui possède les propriétés suivantes :

1. *Bilinéarité* pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

2. *Antisymétrie* pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[Y, X] = -[X, Y],$$

3. *Identité de Jacobi* pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Une algèbre de Lie est *abélienne* (ou *commutative*) si

$$[X, Y] = [Y, X] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Définition 2.14. Un sous-ensemble $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est appelée sous-algèbre (de Lie) si \mathfrak{h} est fermé sous le crochet de Lie hérité de \mathfrak{g} .

Si nous écrivons $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ pour représenter $\{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{h}\}$, alors \mathfrak{h} est une sous-algèbre si

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Définition 2.15. Supposons qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} peut être écrite comme une somme,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$$

(dans le sens d'une addition d'espaces vectoriels) où \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 sont des sous-algèbres de Lie. Soit $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$, représente l'ensemble

$$\{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2\}.$$

Si $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$, \mathfrak{g} est appelé une somme directe de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 , alors elle est dénotée par

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

Si $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_2$, \mathfrak{g} est appelé une somme semi-directe de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 , alors elle est dénotée par

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2.$$

Exemple 2.11 : L'algèbre de translation

$$t(3) = \{P_1, P_2, P_3\}$$

définie tel que

$$[P_i, P_j] = 0$$

est une somme directe,

$$t(3) = \{P_1\} \oplus \{P_2\} \oplus \{P_3\}.$$

Définition 2.16. Une sous-algèbre \mathfrak{h} d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est appelée un idéal si

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h},$$

c'est-à-dire

$$\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}.$$

Il est à noter que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$, alors \mathfrak{g}_2 est un idéal de \mathfrak{g} .

Définition 2.17. Le centralisateur $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est le plus grand idéal \mathfrak{h} tel que

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = 0\},$$

c'est-à-dire la plus grande sous-algèbre qui commute avec l'algèbre entier.

Définition 2.18. Le normalisateur d'une sous-algèbre \mathfrak{h} d'un groupe de Lie \mathfrak{g} est la sous-algèbre

$$N(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Définition 2.19. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Considérons la séquence de sous-algèbres suivante qui est déterminée récursivement

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}], \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}], \dots$$

où $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. Alors \mathfrak{g} est dit résoluble s'il existe un certain k tel que

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}.$$

Si non, elle est dite parfaite.

Nous pouvons aussi considérer la séquence de sous-algèbres

$$\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(0)}], \quad \mathfrak{g}_{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}_{(n+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(n)}], \dots$$

où $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. Alors \mathfrak{g} est dit nilpotente s'il existe un certain k tel que

$$\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\},$$

ce qui revient à dire que sa série centrale se termine.

Définition 2.20. Le radical $R(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'idéal maximal résoluble. Il est unique et contient tous les autres idéaux résolubles.

Définition 2.21. Le nilradical est l'idéal nilpotent maximal. On peut montrer que $NR(\mathfrak{g}) \subseteq R(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$.

Définition 2.22. Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite simple si elle ne contient aucun idéal non-trivial, c'est-à-dire que, ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et \mathfrak{g} . Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite semi-simple si elle s'exprime comme la somme directe d'algèbres simples.

Proposition 2.2. Toute algèbre de Lie \mathfrak{g} de dimension finie peut être décomposée sous la forme

$$\mathfrak{g} = S \oplus R(\mathfrak{g})$$

où $R(\mathfrak{g})$ est le radical de \mathfrak{g} et S est semi-simple. Ceci se nomme la décomposition de Lévi.

Exemple 2.12 : L'algèbre euclidienne.

$$\mathfrak{e}(2) = \{P_1, P_2, L_3\}$$

Il s'agit de l'algèbre euclidienne de dimension 2 contenant deux translations P_1, P_2 et une rotation L_3 . Les relations de commutations sont

$$[P_1, P_2] = 0, [P_1, L_3] = -P_2, [P_2, L_3] = P_1,$$

alors la séquence est

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \{P_1, P_2, L_3\}, \mathfrak{g}^{(1)} = \{P_1, P_2\}, \mathfrak{g}^{(2)} = \{0\},$$

ce qui indique que $\mathfrak{e}(2)$ est une algèbre de Lie résoluble. Toutefois,

$$\mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{g}_{(2)} = \mathfrak{g}_{(3)} = \dots = \{P_1, P_2\},$$

alors $\mathfrak{e}(2)$ n'est pas nilpotente. Le radical de $\mathfrak{e}(2)$ est $R(\mathfrak{e}_2) = \mathfrak{e}_2$, puisque \mathfrak{e}_2 est déjà résoluble.

Exemple 2.13 : L'algèbre de Heisenberg. L'algèbre de Heisenberg $\{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ est définie comme

$$[\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2] = -\mathfrak{e}_3, \quad [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_3] = 0, \quad [\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3] = 0,$$

alors

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = \{\mathfrak{e}_3\}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} = \{0\},$$

$$\mathfrak{g}_{(0)} = \{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}, \quad \mathfrak{g}_{(1)} = \{\mathfrak{e}_3\}, \quad \mathfrak{g}_{(2)} = \{0\}.$$

L'algèbre de Heisenberg est donc nilpotente.

Exemple 2.14 : L'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Soit $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{T, D, C\}$, où

$$[D, T] = -T, [D, C] = C, [T, C] = 2D.$$

Cette algèbre de Lie n'est pas résoluble (et n'est pas nilpotente). En fait, elle ne contient aucun idéal non-trivial. Ainsi, $sl(2, \mathbb{R})$ est une algèbre simple.

Exemple 2.15 : Symétries de l'équation de chaleur. L'algèbre de Lie de symétrie \mathfrak{g} pour l'équation de chaleur [78]

$$u_t = u_{xx}$$

est générée par six champs de vecteurs :

- $X = \partial_x, \quad T = \partial_t,$ translations en x et en t ,
- $D = u\partial_u, \quad L = x\partial_x + 2t\partial_t,$ dilatations en u et en x, t ,
- $B = 2t\partial_x - xu\partial_u,$ Boost galiléen,
- $C = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u,$ transformation conforme,

et par une famille d'espaces vectoriels de dimension infinie $S(f) = f(x, t)\partial_u$ où f satisfait l'équation de chaleur $f_t = f_{xx}$.

En effectuant le simple changement de base que voici

- $X' := X = \partial_x$
- $T' := T = \partial_t$
- $D' := D = u\partial_u$
- $L' := \frac{1}{2}L - \frac{1}{4}D = \frac{1}{2}x\partial_x + t\partial_t - \frac{1}{4}u\partial_u$
- $B' := B = 2t\partial_x - xu\partial_u$
- $C' := \frac{1}{4}C = xt\partial_x + t^2\partial_t - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u,$

la table de commutation est donnée comme suit (pour les composantes à dimension finie)

$[v_1, v_2]$	L'	T'	C'	X'	B'	D'
L'	0	$-T'$	C'	$-\frac{1}{2}X'$	$\frac{1}{2}B'$	0
T'	T'	0	$2L'$	0	$2X'$	0
C'	$-C'$	$-2L'$	0	$-\frac{1}{2}B'$	0	0
X'	$\frac{1}{2}X'$	0	$\frac{1}{2}B'$	0	$-D'$	0
B'	$-\frac{1}{2}B'$	$-2X'$	0	D'	0	0
D'	0	0	0	0	0	0

TABLEAU 2.1 – Table des commutateurs de l'algèbre de symétrie de l'équation de chaleur

Nous reconnaissons l'algèbre $\{L', T', C'\}$ comme $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (simple), et $\{X', B', D'\}$ comme l'algèbre de Heisenberg (résoluble). En fait, $\{X', B', D'\}$ est le radical de \mathfrak{g} . Alors la décomposition de Lévi de \mathfrak{g} est donnée par

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\{L', T', C'\}}_{\text{simple}} \oplus \underbrace{\{X', B', D'\}}_{\text{radical}}.$$

2.4.1 Classification d'algèbres simples

Pour traiter les algèbres de Lie simples, il faut trouver toutes les sous-algèbres maximales de \mathfrak{g} . Pour ce faire, choisissons une représentation matricielle (réelle ou complexe) de \mathfrak{g} de dimension finie. Cette représentation agissant dans un espace \mathcal{V} nous laisse deux choix possibles, soit que la sous-algèbre maximale laisse des sous-espaces de \mathcal{V} invariants, soit qu'elle ne laisse aucun sous-espace de \mathcal{V} invariant. S'il y a invariance, on classe tous les sous-espaces invariants selon l'action de G et nous trouvons les sous-algèbres de matrices laissant invariant chaque sous-espace. On dit alors que la sous-algèbre est plongée réductiblement dans l'algèbre. Les sous-espaces invariants sont caractérisés par leur signature (ou seulement par leur dimension dans le cas d'un espace euclidien). Les matrices trouvées constituent la (les) sous-algèbre(s)

recherchée(s).

Si la sous-algèbre ne laisse aucun sous-espace invariant, alors elle est soit simple, semi-simple ou réductive. Une algèbre réductive est la somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne. On connaît toutes les sous-algèbres semi-simples des algèbres simples. On construit donc les sous-algèbres réductives en trouvant les centralisateurs des algèbres semi-simples dans \mathfrak{g} . Si une des sous-algèbres trouvées est simple, alors nous réappliquons la procédure, sinon nous utiliserons une autre technique qui sera décrite plus loin.

2.4.2 Sous-algèbres de sommes directes

Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}.$$

Il faut utiliser la méthode du twist de Goursat [44]. Cette méthode permet de déterminer les sous-algèbres twisted et non-twisted. Une algèbre non-twisted est une algèbre conjuguée à une somme directe de sous-algèbres \mathfrak{h} et \mathfrak{k} respectivement ;

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{k}_0, \quad \mathfrak{h}_0 \subseteq \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{k}_0 \subseteq \mathfrak{k}.$$

Une algèbre twisted n'est pas conjuguée à une algèbre de ce type. On commence tout d'abord par classifier les sous-algèbres de \mathfrak{h} et \mathfrak{k} sans oublier les sous-algèbres triviales. On forme alors une liste des toutes les sous-algèbres de \mathfrak{h} et \mathfrak{k} avec leur normalisateur respectif. On crée une liste des sous-algèbres non-twisted en effectuant toutes les combinaisons

$$S_i = \mathfrak{h}_j \oplus \mathfrak{k}_k$$

possibles.

Le twist de Goursat sert à généraliser les algèbres twisted. Deux sous-algèbres $\mathfrak{h}_{j,a} \subseteq \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}_{k,b} \subseteq \mathfrak{k}$ (j, k sont les dimensions des sous-algèbres), peuvent être torsadées ensemble s'il existe un homomorphisme d'une vers l'autre. On choisit alors une base de $\mathfrak{h}_{j,a} = a_1, \dots, a_j$ et nous construisons l'homomorphisme le plus général

$$\tau(a_i) = \lambda_i^j b_j \in \mathfrak{k}_{k,b}, \quad j \geq k \geq 1.$$

On utilise alors les propriétés des homomorphismes et la table de commutations pour éliminer certaines des constantes. Par la suite, il faut appliquer le normalisateur

$$N(\mathfrak{h}_{j,a}, G_{\mathfrak{h}}) \otimes N(\mathfrak{k}_{k,b}, G_{\mathfrak{k}})$$

pour simplifier les paramètres. Pour ce faire, nous utilisons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\lambda X} Y e^{-\lambda X} = Y + \lambda[X, Y] + \frac{\lambda^2}{2}[X, [X, Y]] + \frac{\lambda^3}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \dots$$

2.4.3 Sous-algèbres de sommes semi-directes

Nous voulons classifier les algèbres de types

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathcal{N},$$

où \mathcal{N} est l'idéal de \mathfrak{g} , ce qui est simplifié si on peut trouver un idéal abélien. On débute tout d'abord par la classification des sous-algèbres de \mathfrak{h} (qui peuvent être simples, être une somme directe ou une somme semi-directe). Nous devons alors construire les algèbres splitting et les algèbres non-splitting. Pour les algèbres splitting, la procédure est la suivante :

1. Pour chaque sous-algèbre \mathfrak{h}_i de \mathfrak{h} , trouver tous les sous-espaces invariants $\mathcal{N}_{i,a}$ de \mathcal{N} qui sont également des sous-algèbres, incluant les sous-algèbres triviales \emptyset et \mathcal{N} :

$$\mathcal{N}_{i,a} \subseteq \mathcal{N}, \quad [\mathcal{N}_{i,a}, \mathcal{N}_{i,a}] \subseteq \mathcal{N}_{i,a}, \quad [\mathfrak{h}_i, \mathcal{N}_{i,a}] \subseteq \mathcal{N}_{i,a}.$$

2. Classifier les sous-espaces selon l'action du normalisateur de \mathfrak{h}_i dans $G_{\mathfrak{h}}$.
3. Créer une nouvelle liste de toutes les algèbres splitting

$$S_1(\mathfrak{g}) = \{\mathfrak{g}_{i,a} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g}_{i,a} = \mathfrak{h}_i \oplus \mathcal{N}_{i,a}\}$$

et trouver le normalisateur de chacun des $\mathfrak{g}_{i,a}$.

Afin de trouver les sous-algèbres non-splitting, nous suivons la méthode suivante.

Pour chacune des sous-algèbres splitting, nous considérons une base de la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{i,a} &= \{\mathfrak{k}_a, X_j\}, \quad \mathfrak{k}_a \in \mathfrak{h}, \quad X_j \in \mathcal{N}, \\ 1 \leq a \leq f_i &= \dim(\mathfrak{h}_i), \quad j \leq r = \dim(\mathcal{N}_{i,a}). \end{aligned}$$

La procédure est alors

1. Compléter la base $\{X_j\}$ vers une base de \mathcal{N} ,

$$\mathcal{N} = \{X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s\}, \quad r + s = \dim(\mathcal{N})$$

et former l'espace vectoriel

$$\mathcal{V} = \{\mathfrak{k}_a + \sum_{\mu=1}^s c_{a\mu} Y_\mu, X_j\}, \quad a = 1, \dots, f_i, \quad j = 1, \dots, r.$$

On écrit les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\mathfrak{k}_a, \mathfrak{k}_b] &= f_{ab}^c \mathfrak{k}_c, & [\mathfrak{k}_a, X_k] &= \alpha_{ak}^l X_l, \\ [\mathfrak{k}_a, Y_\mu] &= \rho_{a\mu}^\nu Y_\nu + \sigma_{a\mu}^m X_m, & [X_i, X_j] &= \omega_{ij}^m X_m, \\ [Y_\mu, Y_\nu] &= \beta_{\mu\nu}^\sigma Y_\sigma + \gamma_{\mu\nu}^m X_m, & [X_i, Y_\mu] &= \lambda_{i\mu}^\nu Y_\nu + \tau_{i\mu}^m X_m. \end{aligned}$$

Il faut maintenant imposer que cet espace soit une algèbre de Lie, du moins

$$[\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subseteq \mathcal{V}.$$

Cette condition implique que

$$\begin{aligned} c_{b\nu} \rho_{a\nu}^\alpha - c_{a\mu} \rho_{b\mu}^\alpha - c_{c\alpha} f_{ab}^c &= -c_{a\mu} c_{b\nu} \beta_{\mu\nu}^\alpha \\ c_{a\mu} \lambda_{j\mu}^\nu &= 0 \end{aligned}$$

pour toutes valeurs de a, b, α, j et ν . En général, ces équations ne sont pas très simples à résoudre. Le travail est simplifié lorsque certains coefficients sont nuls.

Le cas où \mathcal{N} est abélien est évidemment le plus simple.

2. Une solution aux équations précédentes forme une algèbre de Lie. Nous réduisons par la suite les constantes à l'aide du normalisateur

$$\tilde{G} = N(\mathfrak{g}_{i,a}, G) \oplus N(\mathcal{N}_{i,a}, G_{\mathcal{N}}),$$

avec $G_{\mathcal{N}} = \exp(\mathcal{N})$.

Si \mathcal{N} est abélien, on peut générer des cobords à partir de la table de commutations. En effet, nous calculons les commutateurs

$$[\mathfrak{k}_a, Y_\nu].$$

Le résultat de ceux qui sont non nuls pourront, selon un choix libre de λ , simplifier certains coefficients. Il ne restera alors qu'à appliquer le normalisateur pour simplifier au maximum les derniers coefficients. Ceci nous donne alors la liste des sous-algèbres non-splitting.

En appliquant ces procédures itérativement, nous obtenons une liste de toutes les sous-algèbres de \mathfrak{g} . Chacune des ces sous-algèbres permet d'obtenir une réduction du nombre de variables indépendantes de l'équation aux dérivées partielles (EDP) qui possédait cette algèbre de symétrie. Il est à noter qu'il peut exister des automorphismes externes, relatifs à l'équation. Ainsi, certaines sous-algèbres peuvent fournir la même réduction. Habituellement, ces automorphismes sont assez simples à voir, par exemple les réflexions $x \rightarrow -x$ sur les variables indépendantes peuvent ne pas modifier l'équation.

2.5 Groupes de transformations locales

Définition 2.23. *Un groupe de transformations locales agissant sur \mathbb{R}^n consiste en un groupe de Lie G avec l'identité e et d'un ensemble ouvert V défini comme*

$$\{e\} \times \mathbb{R}^n \subseteq V \subseteq G \times \mathbb{R}^n$$

et une application lisse

$$\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui satisfait les conditions,

1. $\phi(e, x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
2. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(g \circ h, x)$ pour tout $g, h \in G$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $V = G \times \mathbb{R}^n$, alors le groupe d'action de G est global. Toutefois, plus généralement, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, l'action du groupe est limitée à un certain voisinage de l'identité e dans G . De là, nous référons au groupe de transformations locales.

Les générateurs infinitésimaux sont associés à un groupe de transformations locales. Soit \mathfrak{g} , l'algèbre de Lie de G . Alors chaque élément $\alpha \in \mathfrak{g}$ génère un sous-groupe à un paramètre $\exp[t\alpha]$ de G . Le générateur infinitésimal de \mathbb{R}^n correspondant est le champ de vecteurs $\phi(\alpha)$ dont la valeur à $x \in \mathbb{R}^n$ est

$$\phi(\alpha)|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\exp(t\alpha), x). \quad (2.1)$$

Si $x = (x^1, \dots, x^p)$ sont les coordonnées de \mathbb{R}^p , alors les champs de vecteurs prennent la forme

$$\vec{v} = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^p(x) \frac{\partial}{\partial x^p}. \quad (2.2)$$

Ainsi, le champ de vecteurs α qui génère la transformation à un paramètre

$$\phi(\exp(t\alpha), x) = (\phi^1(t, x), \dots, \phi^p(t, x))$$

aux fonctions de coordonnées

$$\xi_i(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi^i(t, x) \right|_{t=0} \quad i = 1, \dots, p.$$

À l'inverse, soit un espace vectoriel donné du type (2.2), le groupe de transformations à un paramètre généré est trouvé en solutionnant le système d'équations aux

dérivées ordinaires (EDOs)

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_i}{dt} &= \xi^i(\tilde{x}) & i = 1, \dots, p, \\ t = 0 & \quad \tilde{x}_i(t = 0) = x_i.\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs de \mathbb{R}^n peuvent aussi être vu comme des opérateurs de dérivées partielles de premiers ordre qui agissent sur des fonctions lisses $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\vec{v}F(x) = \xi^1(x)\frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + \xi^n(x)\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

L'application ϕ de l'algèbre de Lie vers le champ de vecteurs définie par (2.1) préserve les crochets de Lie :

$$\phi([\alpha, \beta]) = [\phi(\alpha), \phi(\beta)]. \quad (2.3)$$

De là, les générateurs infinitésimaux d'un groupe de transformations locales forment une algèbre de Lie de dimension finie d'un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^n . À l'inverse, avec une algèbre de Lie de dimension finie du champ de vecteurs de \mathbb{R}^n , le théorème de Frobenius dit qu'il y a un groupe de transformations locales dont les générateurs infinitésimaux sont précisément les champs de vecteurs en question.

Exemple 2.16 : Générateurs infinitésimaux et groupes de transformations locales. Soit $G = \mathbb{R}$ avec la coordonnée t et considérons l'action de groupe sur \mathbb{R}^2 suivant :

$$\phi(t; x, y) = \left(\frac{x}{1 - ty}, \frac{y}{1 - ty} \right),$$

ici

$$V = \{(t, x, y) : (y > 0 \text{ et } t < \frac{1}{y}) \text{ ou } (y = 0) \text{ ou } (y < 0 \text{ et } t > \frac{1}{y})\}.$$

L'action n'est donc pas globale. Elle ne peut être définie pour un point en dehors de V . De là, les coefficients du générateur infinitésimal sont

$$\begin{aligned}\xi^1(x, y) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{1 - ty} \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{xy}{(1 - ty)^2} \right) \Big|_{t=0} = xy, \\ \xi^2(x, y) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{1 - ty} \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{y^2}{(1 - ty)^2} \right) \Big|_{t=0} = y^2.\end{aligned}$$

Alors le générateur est

$$\vec{v} = xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dans le but de retrouver notre transformation, nous résolvons les équations différentielles pour $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, t)$ et $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}\tilde{y}, & \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \tilde{y}^2, \\ \tilde{x}(t=0) &= x, & \tilde{y}(t=0) &= y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{dt} &= \tilde{y}^2 \Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2} = dt \Rightarrow \frac{-1}{\tilde{y}} = t + f(x, y), \\ \text{quand } t=0 &\rightarrow \frac{-1}{y} = f(x, y). \text{ Alors } \tilde{y}(x, y, t) = \frac{y}{1-yt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \tilde{x}\tilde{y} = \frac{\tilde{x}y}{1-yt} \Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = \frac{y}{1-yt} dt \Rightarrow \ln \tilde{x} = -\ln(1-yt) + \ln f(x, y), \\ &\Rightarrow \tilde{x} = \frac{f(x, y)}{1-yt}, \text{ à } t=0, \text{ alors } x = f(x, y) \Rightarrow \tilde{x}(x, y, t) = \frac{x}{1-yt}. \end{aligned}$$

Une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite G -invariante si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(gx) = F(x)$ lorsque gx est défini. Similairement, un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est appelé un sous-ensemble G -invariant si pour tout $x \in S$, $gx \in S$ quand gx est défini. Il est à noter que si F est une fonction G -invariante, toutes les lignes de niveaux de F sont des ensembles G -invariants. Même si un ensemble S d'une sous-variété donnée par un affaissement vers zéro d'une fonction, et S est G -invariant, alors il n'est pas nécessairement vrai que F soit une fonction G -invariante. Le groupe de symétrie d'une ligne de niveau d'une fonction (c'est-à-dire que le plus grand groupe de transformations laisse la ligne de niveau invariante) va généralement contenir plus de symétries que le groupe de symétries de la fonction. Le théorème qui suit donne le critère infinitésimal pour l'invariance d'une fonction ou d'une sous-variété [78].

Théorème 2.1. *Supposons que G est un groupe de Lie de transformations connexes agissant sur \mathbb{R}^n , tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $G_x = \{g : gx \text{ est défini}\}$ est aussi connexe.*

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable dont les matrices de Jacobi sont de rang maximal en tout point de l'espace.

1. F est une fonction G -invariante si et seulement si

$$\alpha F_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

pour chaque générateur infinitésimal α de G et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. La sous-variété $S = \{x : F(x) = 0\}$ est G -invariante si et seulement si (2.4) est satisfaite pour chaque générateur infinitésimal α et pour chaque $x \in S$.

Preuve : La nécessité de l'équation (2.4) provient de la différentiation de l'équation

$$F(\exp(t\alpha)x) = 0, \quad \alpha \in \mathfrak{g}, x \in S,$$

par rapport à t et en l'évaluant à $t = 0$. Pour démontrer la suffisance, supposons que le jacobien de F à x_0 soit de rang maximal. Alors, par le théorème de la fonction implicite, nous devons changer localement les coordonnées pour que F ait la forme

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m).$$

Ainsi $S = \{(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)\}$. La condition infinitésimale (2.4) implique que α , lorsqu'il est restreint à S , a la forme $\alpha_{m+1}(x) \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} + \dots + \alpha_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$, $x \in S$. Alors le sous-groupe à un paramètre $\exp(t\alpha)$ obtenu en intégrant le système requis d'EDO laisse évidemment S localement invariant. De là pour chaque $x \in S$, il y a un voisinage \tilde{N}_x de 0 dans \mathfrak{g} tel que pour $\alpha \in \tilde{N}_x$, $\exp(t\alpha)x \in S$. Maintenant $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ recouvre un voisinage suffisamment petit de 0 dans \mathfrak{g} d'une manière homéomorphique sur un voisinage de e dans G . Ainsi pour chaque $x \in S$, il y a un voisinage N_x de e dans G (dépendant continuellement de x) tel que quand $g \in N_x$, $gx \in S$. Finalement, pour montrer que S est invariant sur G , $x \in S$ donné, soit $H_x = \{g \in G : gx \text{ est défini et } gx \in S\}$. Il est simple de montrer que H_x est ouvert et aussi, si $g \in \text{clos } H_x$, alors gx n'est pas défini. Ceci implique, par la connexion de G_x , que $H_x = G_x$ et ainsi S est en effet invariant sur G . Pour prouver la première partie du théorème, il suffit de noter que F est invariant si et seulement si toutes les lignes de niveau de F sont invariants. Toutefois, la seconde partie du théorème implique la première partie. \square

2.6 Groupe de symétrie des équations différentielles

Cette section est principalement un résumé des résultats présentés dans le livre de P. Olver [78] concernant les groupes de symétrie des équations différentielles.

Soit

$$\Delta_\nu(x, u, \dots, u^{(n)}) = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, s, \quad (2.5)$$

un système d'équations aux dérivées partielles, où $x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^p$ représente les variables indépendantes et où $u = (u^1, \dots, u^q) \in \mathbb{R}^q$ représente les variables dépendantes. $u^{(n)}$ indique que la fonction Δ_ν dépend aussi des dérivées de u jusqu'à un ordre n .

$$X = \{x \in \mathbb{R}^p\}, U = \{u \in \mathbb{R}^q\}, X \times U = \text{espace des coordonnées.}$$

Les solutions $u = f(x)$ du système (2.5) sont identifiables avec les graphes Γ qui sont des sous-variétés de $X \times U$ de dimension p

$$\Gamma = \{(x, f(x))\} \subset X \times U.$$

Un groupe de symétrie du système (2.5) est un groupe local de transformations G agissant sur $X \times U$ qui préserve l'espace des solutions de (2.5). Chaque solution de notre système est transformée en une autre solution de notre fonction.

En général, pour une fonction $u = f(x)$ donnée, définie dans un voisinage N d'un point $x_0 \in X$, le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in N\}.$$

Pour $g \in G$ fermé à l'identité e , nous pouvons définir l'ensemble

$$g\Gamma = \{\phi(g; x, u) : (x, u) \in \Gamma\}.$$

Puisque G agit continuellement et e laisse Γ inchangé, nous pouvons trouver un voisinage de e dans G tel que pour tout g à l'intérieur, $g\Gamma$ est le graphe d'une certaine nouvelle fonction $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{u})$, explicitement construite comme suit.

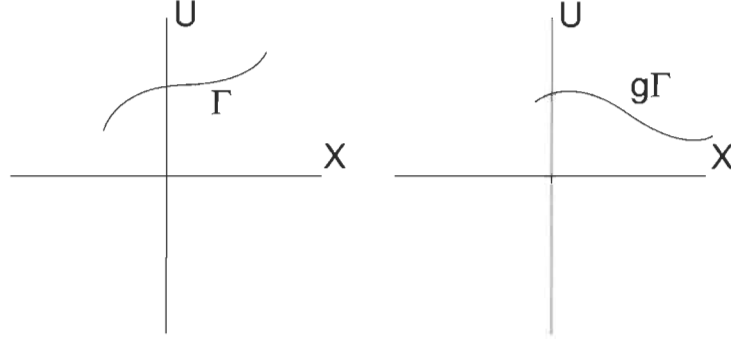


FIGURE 2.4 – Génération de nouveaux graphes via la multiplication par le groupe.

Si $\phi = (g; x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u})$ où $\tilde{x}^i = X_g^i(x, u)$, $\tilde{u}^\alpha = U_g^\alpha(x, u)$, alors le graphe $g\Gamma$ est donné par les équations paramétriques

$$\tilde{x}^i = X_g^i(x, f(x)), \quad \tilde{u}^\alpha = U_g^\alpha(x, f(x))$$

et nous trouvons $\tilde{f} = g \circ f$ en éliminant x des équations et en exprimant \tilde{u} en terme de la nouvelle variable \tilde{x} .

Exemple 2.17 : Le groupe des rotations $SO(2)$. $p = q = 1$, $G = SO(2)$ est le groupe des rotations agissant sur $X \times U = \mathbb{R}^2$. Les transformations sont

$$\tilde{x} = x \cos \theta - u \sin \theta, \quad \tilde{u} = x \sin \theta + u \cos \theta, \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ainsi, si nous considérons la fonction $f(x) = ax + b$, nous obtenons

$$\tilde{x} = X_\theta(x, f(x)) = x \cos \theta - (ax + b) \sin \theta = x(\cos \theta - a \sin \theta) - b \sin \theta,$$

$$\tilde{u} = U_\theta(x, f(x)) = x \sin \theta + (ax + b) \cos \theta = x(\sin \theta + a \cos \theta) + b \cos \theta.$$

Nous pouvons solutionner la première équation pour x

$$x = \frac{\tilde{x} + b \sin \theta}{\cos \theta - a \sin \theta}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= x \sin \theta + u \cos \theta, \\ &= x \sin \theta + (ax + b) \cos \theta, \\ &= (\sin \theta + a \cos \theta) \left(\frac{\tilde{x} + b \sin \theta}{\cos \theta - a \sin \theta} \right) + \frac{b \cos \theta (\cos \theta - a \sin \theta)}{\cos \theta - a \sin \theta}, \\ &= \frac{\sin \theta + a \cos \theta}{\cos \theta - a \sin \theta} \tilde{x} + \frac{b}{\cos \theta - a \sin \theta}. \end{aligned}$$

La fonction transformée est donc

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}), \text{ où } \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin \theta + a \cos \theta}{\cos \theta - a \sin \theta} \tilde{x} + \frac{b}{\cos \theta - a \sin \theta}.$$

Définition 2.24. Soit

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad (2.6)$$

un système d'équations aux dérivées partielles avec p variables indépendantes et q variables dépendantes. Un groupe de symétrie est un groupe de transformations locales G agissant sur $X \times U$ tel que chaque fois que $u = f(x)$ est une solution du système (2.6).

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \circ f(\tilde{x}) \quad g \in G$$

est aussi une solution du système (2.6) pour n'importe quel $g \in G$.

Question : Comment obtenir le plus grand groupe de symétrie locale continu pour un système d'équations différentielles donné ?

Réponse : La méthode des prolongations des champs de vecteurs.

Nous allons construire un espace représentant les différentes dérivées présentes dans notre système (appelé jet bundle) et alors nous réalisons le système comme une sous-variété d'un tel espace.

Définissons le multi-indice $J = (j_1, \dots, j_p)$ où chaque j_i est un entier non négatif et nous définissons

$$|J| = j_1 + \dots + j_p = k.$$

Les diverses dérivées des variables dépendantes u^α selon les variables indépendantes x^i sont exprimées en terme de k^e ordre de dérivées partielles selon x^i .

$$\partial_J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_p}^{j_p}}.$$

Tel que

$$u_J^\alpha = \frac{\partial^{|J|} u^\alpha}{\partial_{x_1}^{j_1} \dots \partial_{x_p}^{j_p}}.$$

Nous étendons l'espace des coordonnées $X \times U$ jusqu'au jet bundle

$$\mathcal{Y}_k = \{(x', u^\alpha, u_J^\alpha) : |J| \leq k\}$$

qui est l'espace des coordonnées et toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement.

Soit un système donné,

$$\Delta^i(x, u, u_J) = 0 \quad i = 1, \dots, s$$

d'EDP, une solution est seulement une fonction lisse $f : X \rightarrow U$, telle que

$$\Delta(x; f(x), \partial_J f(x)) \equiv 0.$$

Si G est un groupe de transformations locales agissant sur l'espace $X \times U$, il y a une action locale induite de G sur l'espace de jet entier \mathcal{Y}_k . Ceci constitue la prolongation d'une transformation de coordonnées de G vers une transformation incluant aussi les dérivées. Le problème est que les transformations de groupe et leurs prolongations sont souvent fortement non-linéaires. Ceci peut faire en sorte que de telles prolongations sont difficiles à utiliser. Toutefois, pour solutionner ce problème, nous devons effectuer l'analyse de prolongation au niveau de l'algèbre de Lie où tous les opérateurs sont linéaires.

Soit un sous-groupe de G à un paramètre donné, nous définissons la k^e prolongation de son générateur infinitésimal associé α comme étant le générateur infinitésimal d'action de sous-groupe à un paramètre étendu jusqu'au k^e ordre jet bundle.

Définition 2.25. Soit une fonction différentiable $F(x, u, u_J)$ donnée, nous définissons la dérivée totale D_i ($i = 1, \dots, p$) comme la dérivée de F traitant u comme une fonction de x qui est

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{|J|=k} u_{J_i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

où $J_i = (j_1, \dots, j_{i-1}, j_i + 1, j_{i+1}, \dots, j_p)$.

Exemple 2.18 : Dérivées totales. Pour $p = 2, q = 1, k = 2$, nous avons $x^i = (x, y)$ et $u = (u)$ donc les dérivées totales sont

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{xyy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yyy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + u_{yyx} \frac{\partial}{\partial u_{yx}} + u_{yxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Exemple 2.19 : Dérivées totales et multi-indice. Si

$$F = xu_x + y^2 u_y u_{xx},$$

alors

$$D_x F = u_x + xu_{xx} + y^2 u_{xy} u_{xx} + y^2 u_y u_{xxx}$$

étant donné un multi-indice $J = (j_1, \dots, j_p)$, nous définison

$$D_J = \underbrace{D_1 D_1 \dots D_1}_{j_1} \underbrace{D_2 D_2 \dots D_2}_{j_2} \dots \underbrace{D_p D_p \dots D_p}_{j_p}.$$

Théorème 2.2. Supposons α un champ de vecteur lisse

$$\alpha = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

dans l'espace $X \times U$. Alors, la k^e prolongation de α est le champ de vecteurs

$$pr^{(k)}(\alpha) = \alpha + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{J, 0 < |J| \leq k} (\phi^\alpha)^J(x, u, u_J) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}$$

dans le jet bundle \mathcal{Y}_k , où les fonctions des coefficients (ϕ^α) sont données par

$$(\phi^\alpha)^J = D_J \left(\phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \xi^i \right) + \sum_{i=1}^p u_{J_i}^\alpha \xi_i.$$

Exemple 2.20 : Première prolongation de $SO(2)$. $p = q = 1$, $G = SO(2)$ dont les actions induisent des transformations de la forme

$$\tilde{x} = x \cos \theta - u \sin \theta,$$

$$\tilde{u} = x \sin \theta + u \cos \theta.$$

Le générateur infinitésimal est

$$\alpha = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

où

$$\xi(x, u) = \left. \frac{d}{d\theta} (x \cos \theta - u \sin \theta) \right|_{\theta=0} = (-x \sin \theta - u \cos \theta)|_{\theta=0} = -u,$$

$$\phi(x, u) = \left. \frac{d}{d\theta} (x \sin \theta + u \cos \theta) \right|_{\theta=0} = (x \cos \theta - u \sin \theta)|_{\theta=0} = x.$$

Alors,

$$\alpha = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}.$$

La première prolongation est $\text{pr}^{(1)}(\alpha) = \alpha + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x}$, où

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - u_x \xi) + u_{xx} \xi, \\ &= D_x(x + u u_x) - u u_{xx} = 1 + (u_x)^2 + u u_{xx} - u u_{xx} = 1 + (u_x)^2, \end{aligned}$$

alors

$$\text{pr}^{(1)}\alpha = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + (u_x)^2) \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Exemple 2.21 : Prolongation d'ordre supérieur. Considérons le cas $p = 2, q = 1$ général. Nous avons les variables indépendantes x, t et la variable dépendante u . Le plus général espace vectoriel sur $X \times U$ est

$$\alpha = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

La première prolongation est

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x(\phi - u_x \xi - u_t \tau) + u_{xx} \xi + u_{xt} \tau \\ &= \phi_x + \phi_u u_x - \xi_x u_x - \xi_u (u_x)^2 - \xi u_{xx} - \tau_x u_t - \tau_u u_x u_t \\ &\quad - \tau u_{xt} + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u (u_x)^2 - \tau_u u_x u_t \end{aligned}$$

Similairement,

$$\phi^l = D_l(\phi - u_x \xi - u_t \tau) + u_{xl} \xi + u_{tl} \tau,$$

$$\phi^l = \phi_l - \xi_l u_x + (\phi_u - \tau_l) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u (u_t)^2.$$

Pour la deuxième prolongation, nous avons

$$\text{pr}^{(2)}(\alpha) = \text{pr}^{(1)}(\alpha) + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}.$$

Nous donnons la formule pour ϕ^{xx}

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - u_x \xi - u_t \tau) + u_{xxx} \xi + u_{xxt} \tau,$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} = & \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})(u_x)^2 \\ & - 2\tau_{xu}u_xu_t - \xi_{uu}(u_x)^3 - \tau_{uu}(u_x)^2u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} \\ & - 2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_{xx} - \tau_uu_{xt} - 2\tau_uu_{xt}. \end{aligned}$$

Similairement, nous pouvons trouver ϕ^{tt} et ϕ^{xt}

$$\phi^{tt} = D_t^2(\phi - u_x \xi - u_t \tau) + u_{ttt} \xi + u_{ttt} \tau,$$

$$\begin{aligned} \phi^{tt} = & \phi_{tt} + u_t(2\phi_{tu} - \tau_{tt}) - u_x \xi_{tt} + u_t^2(\phi_{uu} - 2\tau_{tu}) \\ & - 2u_tu_x \xi_{tu} - u_t^3 \tau_{uu} - u_t^2u_x \xi_{uu} + u_{tt}(\phi_u - 2\tau_t) \\ & - 2u_{tx} \xi_t - 3u_{tt}u_t \tau_u - 2u_tu_{tx} \xi_u - u_xu_{tt} \xi_u, \end{aligned}$$

$$\phi^{xt} = D_t D_x(\phi - u_x \xi - u_t \tau) + u_{xxt} \xi + u_{xtt} \tau,$$

$$\begin{aligned} \phi^{xt} = & \phi_{xt} + u_x(\phi_{tu} - \xi_{xt}) + u_t(\phi_{xu} - \tau_{xt}) + u_xu_t(\phi_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu}) \\ & - u_x^2 \xi_{tu} - u_t^2 \tau_{xu} - u_x^2u_t \xi_{uu} - u_xu_t^2 \tau_{uu} + u_{xt}(\phi_u - \xi_x - \tau_t) \\ & - u_{xx} \xi_t - u_{tt} \tau_x - 2u_{xt}u_x \xi_u - 2u_{xt}u_t \tau_u - u_{xx}u_t \xi_u - u_{tt}u_x \tau_u. \end{aligned}$$

Théorème 2.3. *Supposons que α et β sont des champs de vecteurs lisses sur $X \times U$.*

Alors,

$$\text{pr}^{(k)}[a\alpha + b\beta] = a\text{pr}^{(k)}[\alpha] + b\text{pr}^{(k)}[\beta],$$

$$\text{pr}^{(k)}[\alpha, \beta] = [\text{pr}^{(k)}\alpha, \text{pr}^{(k)}\beta], \quad (2.7)$$

ce théorème est tiré de [78, Théorème 2.39]. Nous pouvons comparer l'application de l'équation (2.3) avec l'équation la prolongation de (2.7).

Théorème 2.4. : Le critère de symétrie. Supposons que $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \nu = \{1, \dots, s\}$ est un système d'EDP. Soit G un groupe connexe de transformations locales agissant sur $X \times U$ tel que pour chaque générateur infinitésimal α de G ,

$$(pr^{(n)}\alpha)(\Delta_\nu(x, u^{(n)})) = 0 \quad \text{quand} \quad \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0.$$

Alors G est un groupe de symétrie du système $\Delta_\nu = 0$.

Exemple 2.22 : Symétries généralisées. Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$\Delta = (u - x)u_x + (u + x) = 0$$

dont la première prolongation est

$$pr^{(1)}(\alpha) = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)d_{u_x}.$$

En appliquant cette prolongation à notre équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} pr^{(1)}(\alpha)\Delta &= (-u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)d_{u_x})[(u - x)u_x + (u + x)], \\ &= u_x[(u - x)u_x + (u + x)], \\ &= u_x\Delta. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que cette prolongation est toujours nulle quand $\Delta = 0$, elle est donc une symétrie de l'EDO. Comme nous l'avons vu précédemment, si nous avons une solution $u = f(x)$ de Δ , alors la solution $\tilde{u} = \theta f(\tilde{x})$ est aussi une solution de Δ . Si la solution u est, par exemple, une spirale, alors la solution \tilde{u} sera aussi une spirale, mais ayant subi une rotation.

Théorème 2.5. Supposons $\Delta(u, u^{(k)}) = 0$ un système d'EDP avec p variables indépendantes et q variables dépendantes, tel que les matrices de Jacobi de Δ ont un rang maximal en tout point. Supposons en plus que pour tout point

$$(x_0, u_0) \in \mathcal{Y}_\Delta = \{(x, u^{(k)}) : \Delta(x, u^{(k)}) = 0\} \subset X \times U^k,$$

il y a une solution $u = f(x)$ définie dans le voisinage de x_0 tel que $u_0^{(k)} = pr^{(k)}f(x_0)$. Supposons G un groupe de transformations locales connexe agissant sur $X \times U =$

$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, l'espace des variables dépendantes et indépendantes. Alors G est un groupe de symétrie du système si et seulement si pour chaque générateur infinitésimal α de G ,

$$pr^{(k)}(\alpha)[\Delta(x, u^{(k)})] = 0 \quad \text{lorsque} \quad \Delta(x, u^{(k)}) = 0.$$

Dans le but de déterminer le plus large groupe (continu) de symétries d'un système d'EDP, nous devons ;

1. Commencer avec l'espace vectoriel le plus général et calculer sa prolongation.
2. Utiliser le théorème du critère de symétrie pour déterminer les conditions auxquelles les coefficients du champ de vecteurs doivent obéir pour que le champ de vecteurs soit un générateur infinitésimal de symétrie.
3. Déterminer l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales, et intégrer pour trouver le groupe G des transformations de symétrie.

Définition 2.26. Un groupe de transformations G à un paramètre est un groupe de transformations agissant dans l'espace $X \times U$ dépendant de façon continue d'un paramètre ϵ tel que tout élément $g \in G$ est décrit par la valeur du paramètre ϵ , c'est-à-dire $g = g(\epsilon)$. De plus, ces éléments forment un groupe agissant sur un élément $(x, u) \in X \times U$ de la façon suivante :

1. L'élément identité est défini pour $\epsilon = 0$: $g(0) \cdot (x, u) = (x, u)$.
2. L'action est fermée et associative : $g(\epsilon_1) \cdot (g(\epsilon_2) \cdot (x, u)) = g(\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot (x, u)$.
3. L'action est infiniment différentiable par rapport au paramètre ϵ .

Définition 2.27. Soit Δ un système d'équations différentielles d'ordre n et G un groupe de transformations locale agissant sur l'espace des variables dépendantes et indépendantes. On dit que G est un groupe de symétrie du système d'équations

différentielles Δ si l'action prolongée de G laisse l'ensemble des solutions \mathcal{S}_Δ invariant, c'est-à-dire que si $(x, u) \in \mathcal{S}_\Delta$, alors $(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}) = \text{pr}^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$, où $u^{(n)}$ dénote les fonctions indépendantes et toutes leurs dérivées partielles.

Exemple 2.23 : Base du champ de vecteurs pour l'équation de chaleur.[78]

L'équation de chaleur à une dimension est

$$u_t = u_{xx}. \quad (2.8)$$

Ici, $p = 2, q = 1, k = 2$. Soit $\Delta := u_t - u_{xx} = 0$, nous cherchons les symétries de l'équation $\Delta = 0$. Le champ de vecteurs le plus général est

$$\alpha = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Nous devons calculer la seconde prolongation

$$\text{pr}^{(2)}\alpha = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

où les coefficients $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}, \phi^{tt}$ sont à déterminer en utilisant la formule de prolongation. En appliquant le critère de symétrie, nous calculons

$$(\text{pr}^{(2)}\alpha)(\Delta) = (\text{pr}^{(2)}\alpha)(u_t - u_{xx}) = \phi^t - \phi^{xx}.$$

D'après le critère de symétrie, si α est une symétrie infinitésimale, nous devons avoir

$$\phi^t - \phi^{xx} = 0 \quad \text{quand} \quad u_t - u_{xx} = 0.$$

Les coefficients ϕ^t et ϕ^{xx} ont déjà été déterminés et nous pouvons les substituer dans l'équation. Remplaçant u_t par u_{xx} partout, nous égalons les coefficients des diverses dérivées partielles de u dans le but d'obtenir ses équations déterminantes :

$$- u_x u_{xt} \quad 0 = 2\tau_u \quad (\text{a})$$

$$- u_{xt} \quad 0 = 2\tau_x \quad (\text{b})$$

$$- (u_{xx})^2 \quad 0 = -\tau_u + \tau_u \quad (\text{c})$$

$$- (u_x)^2 u_{xx} \quad 0 = \tau_{uu} \quad (\text{d})$$

$$- u_x u_{xx} \quad 0 = -\xi_u + 2\tau_{xu} + 3\xi_u \quad (e)$$

$$- u_{xx} \quad 0 = \phi_u - \tau_t + \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x \quad (f)$$

$$- (u_x)^3 \quad 0 = \xi_{uu} \quad (g)$$

$$- (u_x)^2 \quad 0 = -\phi_{uu} + 2\xi_{xu} \quad (h)$$

$$- u_x \quad 0 = -\xi_t - 2\phi_{xu} + \xi_{xx} \quad (i)$$

$$- 1 \quad 0 = \phi_t - \phi_{xx} \quad (j)$$

Ce sont les conditions qui doivent être satisfaites par ξ , τ et ϕ si α doit être une symétrie infinitésimale. En suivant les étapes que voici :

- (a) et (b) $\Rightarrow \tau = \tau(t)$,
- (c) est identiquement satisfait, de même que (d),
- l'équation (e) montre que $\xi = \xi(x, t)$,
- l'équation (f) implique $\tau_t = 2\xi_x$, alors $\xi_{xx} = 0$,
- l'équation (g) est identiquement satisfaite et (h) montre que $\phi = \alpha(x, t)u + \beta(x, t)$ pour fonctions arbitraires α et β ,
- l'équation (i) implique que $\xi_t = -2\alpha_x$,
- finalement, l'équation (j) implique que $\alpha_t = \alpha_{xx}$ et $\beta_t = \beta_{xx}$, tel que $\alpha_{xxx} = 0$, $\alpha_{xt} = 0 \Rightarrow \xi_{tt} = 0$.

De là, nous obtenons

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 x t,$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$

$$\phi = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \beta(x, t),$$

où c_1, \dots, c_6 sont des constantes d'intégration et β est une fonction arbitraire sujette à la condition $\beta_t = \beta_{xx}$. Puisque les constantes sont arbitraires et qu'elles ne dépendent d'aucune façon entre elles, nous pouvons prendre les constantes une à une, en la définissant à 1 et les autres à 0 sans perdre de généralité. En effectuant cette méthode, nous obtenons une base pour notre algèbre de Lie caractérisant totalement notre espace vectoriel.

De là, l'algèbre de Lie de symétries infinitésimales est générée par les six champs de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \alpha_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \alpha_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \alpha_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & \alpha_6 &= 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u},\end{aligned}$$

(qui forment la base de l'algèbre de Lie de l'exemple 2.15) et par la famille d'espaces vectoriels de dimension infinie

$$\alpha_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u},$$

où β satisfait l'équation de chaleur, c'est-à-dire

$$\beta_t = \beta_{xx}.$$

En intégrant, nous trouvons les groupes de symétrie de l'équation de chaleur (2.8) à un paramètre :

	\tilde{x}	\tilde{t}	\tilde{u}	Type transformation
G_1	$x + \lambda$	t	u	Translation en x
G_2	x	$t + \lambda$	u	Translation en t
G_3	x	t	$e^\lambda u$	Dilatation en u
G_4	$e^\lambda x$	$e^{2\lambda} t$	u	Dilatation en x et en t
G_5	$x - 2\lambda t$	t	$ue^{(\lambda x - \lambda^2 t)}$	Boost galiléen
G_6	$\frac{x}{1 + 4\lambda t}$	$\frac{t}{1 + 4\lambda t}$	$u\sqrt{1 + 4\lambda t} \exp \left[\frac{-\lambda x^2}{1 + 4\lambda t} \right]$	Transformation conforme
G_β	x	t	$u + \lambda\beta(x, t)$	Principe de superposition

TABLEAU 2.2 – Groupes de symétrie et leur interprétation physique pour l'équation de chaleur.

où G_β provient du fait que l'équation (2.8) est linéaire.

Exemple 2.24 : Base de l'algèbre des équations de Navier-Stokes. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sont données par

$$P_x + uu_x + vu_y + wu_z = \Delta u,$$

$$P_y + uv_x + vv_y + wv_z = \Delta v,$$

$$P_z + uw_x + vw_y + ww_z = \Delta w,$$

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Dans ce cas, $p = 3$, soit (x, y, z) , et $q = 4$, soit (u, v, w, P) . Un champ de vecteurs typique dans $X \times U = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ est donné par

$$\alpha = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_z + \phi \partial_u + \psi \partial_v + \chi \partial_w + \pi \partial_P,$$

où les fonctions-coefficients dépendent de (x, y, z, u, v, w, P) . Le critère infinitésimal de symétrie pour les équations de Navier-Stokes donne

$$\pi^x + u\phi^x + v\phi^y + w\phi^z + u_x\phi + u_y\psi + u_z\chi = \phi^{xx} + \phi^{yy} + \phi^{zz},$$

$$\pi^y + u\psi^x + v\psi^y + w\psi^z + v_x\phi + v_y\psi + v_z\chi = \psi^{xx} + \psi^{yy} + \psi^{zz},$$

$$\pi^z + u\chi^x + v\chi^y + w\chi^z + w_x\phi + w_y\psi + w_z\chi = \chi^{xx} + \chi^{yy} + \chi^{zz},$$

$$\phi^x + \psi^y + \chi^z = 0.$$

Ici ϕ^J , ψ^J , χ^J et π^J sont les fonctions-coefficients de la seconde prolongation de α . À partir de là, nous obtenons les équations suivantes

$$0 = \phi_P - u_x\xi_P - u_y\eta_P - u_z\zeta_P,$$

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_z + \zeta_x = 0,$$

$$\eta_z + \zeta_y = 0, \quad \phi_v + \eta_x = 0,$$

$$\psi_u + \xi_y = 0, \quad \chi_u + \xi_z = 0,$$

$$\phi_w + \zeta_x = 0, \quad \psi_w + \zeta_y = 0,$$

$$\chi_v + \eta_z = 0, \quad \phi_u = \pi_P + \xi_x,$$

$$\psi_v = \pi_P + \eta_y, \quad \chi_w = \pi_P + \zeta_z,$$

ce qui nous donne la solution générale

$$\begin{aligned}
 \xi &= c_1 + c_7x + c_4y + c_5z, & \eta &= c_2 - c_4x + c_7y + c_6z, \\
 \zeta &= c_3 - c_5x - c_6y + c_7z, & \phi &= -c_7u + c_4v + c_5w, \\
 \psi &= -c_4u - c_7v + c_6w, & \chi &= -c_5u - c_6v - c_7w, \\
 \pi &= c_8 - 2c_7P.
 \end{aligned}$$

Pour terminer, nous sommes en mesure de générer la base du champ de vecteurs, soit

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \partial_x, \\
 \alpha_2 &= \partial_y, \\
 \alpha_3 &= \partial_z, \\
 \alpha_4 &= y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \\
 \alpha_5 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\
 \alpha_6 &= z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w, \\
 \alpha_7 &= a\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2P\partial_P, \\
 \alpha_8 &= \partial_P.
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les six premiers cas forment les générateurs infinitésimaux du groupe d'action du mouvement des rigides. Les trois premiers cas sont les translations, les cas 4, 5 et 6 sont les rotations. Nous pouvons voir aussi que les équations de Navier-Stokes sont invariantes sous translation de pression. Pour le cas 7, il s'agit d'une transformation d'échelle, soit

$$G_7 : (e^\lambda x, e^\lambda y, e^\lambda z, e^{-\lambda}u, e^{-\lambda}v, e^{-\lambda}w, e^{-2\lambda}P).$$

Ceci implique que si (u, v, w, P) sont des fonctions dépendantes de (x, y, z) qui sont solutions des équations de Navier-Stokes, alors l'équation suivante est aussi une solution

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{P}) = (e^{-\lambda}u(e^{-\lambda}x, e^{-\lambda}y, e^{-\lambda}z), e^{-\lambda}v(\bullet), e^{-\lambda}w(\bullet), e^{-2\lambda}P(\bullet)).$$

2.7 Réduction par symétrie des équations différentielles

Lorsque nous sommes confrontés à un système d'EDP compliqué provenant d'un problème de physique important, la découverte de n'importe quelle solution explicite quelle qu'elle soit est d'un grand intérêt. Ces solutions explicites peuvent être utilisées comme modèles pour la physique expérimentale, comme références pour les simulations numériques, mais aussi elles peuvent souvent refléter le comportement asymptotique ou dominant de solutions plus générales. La méthode utilisée pour trouver des solutions invariantes sous l'effet d'un groupe procure une méthode systématique et calculatoire pour déterminer de larges classes de solutions particulières. Ces solutions invariantes sous l'effet d'un groupe sont caractérisées par leur invariance sous certains groupes de symétrie du système d'EDP. Plus la solution est symétrique, plus la solution sera facile à construire. Le théorème fondamental des solutions invariantes sous l'effet d'un groupe énonce *grosso modo* que les solutions qui sont invariantes sous un groupe de symétrie à r paramètres du système peuvent être trouvées pour un système d'équations différentielles impliquant r variables indépendantes de moins que dans le système original. En particulier, si nous utilisons le même nombre de paramètres moins un qu'il y a de variables indépendantes ($p - 1 = r$ où p est le nombre de variables indépendantes), alors toutes les solutions invariantes sous ce groupe peuvent être trouvées en solutionnant un système d'EDO. De cette façon, il est possible de réduire un système monstrueux d'EDP vers un système d'EDO plus simple pour lequel il est plus facile de trouver des solutions explicites. En pratique ces solutions peuvent, dans le plupart des cas, être efficacement trouvées et souvent nous donnent les seules solutions explicites connues.

Par exemple, considérons l'EDP non-linéaire de Kadomstev-Petviashvili cylindrique (cKP)

$$\Delta \equiv \left[u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} \right]_x + \frac{\alpha}{4t^2} u_{yy} = 0$$

ainsi que le champ vectoriel

$$\vec{v} = \xi \partial_x + \mu \partial_y + \tau \partial_t + \phi \partial_u,$$

tel que les fonctions ξ , μ , τ et ϕ sont données par

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\tau_t}{3}x - \frac{t^2}{\alpha} \left(\frac{2}{3}\tau_{tt} - \frac{\tau_t}{t} + \frac{\tau}{t^2} \right) y^2 - \frac{2t^2}{\alpha} \eta_t y + \sigma(t), \\ \mu &= \left(\frac{2}{3}\tau_t - \frac{\tau}{t} \right) y + \eta(t), \\ \tau &= \tau(t), \\ \phi &= -\frac{2}{3}\tau_t u + \frac{\tau_{tt}}{18}x - \frac{t}{18\alpha} (2t\tau_{ttt} + \tau_{tt}) y^2 - \frac{t}{3\alpha} (2\eta_t + t\eta_{tt}) y + \frac{\sigma_t}{6},\end{aligned}$$

où les fonctions τ , η et σ sont des fonctions arbitraires de t . Nous pouvons aussi les réécrire en terme de la base de dimension infinie

$$\begin{aligned}v_1(\tau) &= \tau \partial_t + \left(\frac{2}{3}\tau_t - \frac{\tau}{t} \right) y \partial_y + \left[\frac{\tau_t}{3}x - \frac{t^2}{\alpha} \left(\frac{2}{3}\tau_{tt} - \frac{\tau_t}{t} + \frac{\tau}{t^2} \right) y^2 \right] \partial_x \\ &\quad + \left[-\frac{2}{3}\tau_t u + \frac{\tau_{tt}}{18}x - \frac{t}{18\alpha} (2t\tau_{ttt} + \tau_{tt}) y^2 \right] \partial_u, \\ v_2(\eta) &= \eta \partial_y - \frac{2t^2}{\alpha} \eta_t y \partial_x - \frac{t}{3\alpha} (2\eta_t + t\eta_{tt}) y \partial_u, \\ v_3(\sigma) &= \sigma \partial_x + \frac{1}{6} \sigma_t \partial_u.\end{aligned}$$

La table de commutation est donnée par

$[v_i, v_j]$	$v_1(\tau_2)$	$v_2(\eta_2)$	$v_3(\sigma_2)$
$v_1(\tau_1)$	$v_1(\tau_1 \dot{\tau}_2 - \dot{\tau}_1 \tau_2)$	$v_2(\tau_1 \dot{\eta}_2 - \eta_2 (\frac{2}{3} \dot{\tau}_1 - \frac{\tau_1}{t}))$	$v_3(\tau_1 \dot{\sigma}_2 - \frac{1}{3} \dot{\tau}_1 \sigma_2)$
$v_2(\eta_1)$	$v_2(\eta_1 (\frac{2}{3} \dot{\tau}_2 - \frac{\tau_2}{t}) - \tau_2 \dot{\eta}_1)$	$v_3(\frac{2t^2}{\alpha} \dot{\eta}_1 \eta_2 - \frac{2t^2}{\alpha} \dot{\eta}_2 \eta_1)$	0
$v_3(\sigma_1)$	$v_3(\frac{1}{3} \dot{\tau}_2 \sigma_1 - \tau_2 \dot{\sigma}_1)$	0	0

TABLEAU 2.3 – Table de commutation de l'algèbre de Lie pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili cylindrique.

d'où nous pouvons facilement voir que l'algèbre L peut être écrite comme

$$L = \{v_1\} \oplus \{v_2, v_3\}$$

de sorte que v_3 est une sous-algèbre abélienne de $\{v_2, v_3\}$ et tel que $\{v_2, v_3\}$ est le nilradical de L .

Nous allons maintenant rechercher certaines solutions intéressantes. Comme première réduction, nous allons prendre la sous-algèbre $v_3(\sigma)$, telle que nous avons les égalités

$$6 \frac{du}{\dot{\sigma}} = \frac{dx}{\sigma}.$$

Ceci nous donne les invariants

$$I_1 := \rho = y, \quad I_2 := \theta = t, \quad I_3 = z(\rho, \theta) = u - \frac{1}{6} \frac{\sigma_t}{\sigma} x,$$

ou encore

$$u(x, y, t) = z(\rho, \theta) + \frac{1}{6} \frac{\sigma_t}{\sigma} x.$$

En remplaçant ce résultat dans notre équation de départ Δ , nous obtenons après quelques simplifications

$$z_{\rho\rho} = -\frac{2t^2}{3\alpha} \left(\frac{\sigma_{tt}}{\sigma} + \frac{\sigma_t}{2t\sigma} \right),$$

où nous pouvons facilement intégrer pour obtenir

$$z = -\frac{t^2}{3\alpha} \left(\frac{\sigma_{tt}}{\sigma} + \frac{\sigma_t}{2t\sigma} \right) \rho^2 + v(t)\rho + w(t),$$

tel que $v(t)$ et $w(t)$ sont des fonctions arbitraires de t . Ceci nous donne la solution particulière

$$u(x, y, t) = -\frac{t^2}{3\alpha} \left(\frac{\sigma_{tt}}{\sigma} + \frac{\sigma_t}{2t\sigma} \right) y^2 + v(t)y + w(t) + \frac{1}{6} \frac{\sigma_t}{\sigma} x.$$

Nous pouvons aussi considérer la sous-algèbre $\{v_2, v_3\}$ pour réduire notre équation. Nous avons donc les égalités

$$\frac{dy}{\eta} = \frac{dx}{\sigma - fy} = 6 \frac{du}{\dot{\sigma} - 6fy}, \quad f := \frac{2t^2}{\alpha} \dot{\eta}.$$

Ceci nous donne les invariants

$$I_1 := \theta = t, \quad I_2 := \rho = x - \frac{\sigma}{\eta} y + \frac{f}{2\eta} y^2, \quad I_3 := z(\rho, \theta) = u - \frac{\dot{\sigma}}{6\eta} y + \frac{\dot{f}}{2\eta} y^2.$$

Donc, u aura la forme

$$u(x, y, t) = z(\rho, \theta) + \frac{\dot{\sigma}}{6\eta}y + \frac{\dot{f}}{2\eta}y^2.$$

Si nous calculons les différentes dérivées de u , nous avons

$$u_x = z_\rho,$$

$$u_{xx} = z_{\rho\rho},$$

$$u_{4x} = z_{4\rho},$$

$$u_{xt} = z_{\rho\theta} + z_{\rho\rho} \left(\frac{\sigma\dot{\eta}}{\eta^2}y - \frac{\dot{\sigma}}{\eta}y + \frac{\dot{f}}{2\eta}y^2 - \frac{f\dot{\eta}}{2\eta^2} \right),$$

$$u_{yy} = z_{\rho\rho} \left(\frac{f}{\eta}y - \frac{\sigma}{\eta} \right)^2 + \frac{f}{\eta}z_\rho - \frac{\dot{f}}{\eta}$$

et en substituant dans notre équation de départ Δ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= z_{\rho\theta} + z_{\rho\rho} \left(\frac{\sigma\dot{\eta}}{\eta^2}y - \frac{\dot{\sigma}}{\eta}y + \frac{\dot{f}}{2\eta}y^2 - \frac{f\dot{\eta}}{2\eta^2} \right) + 6z_{\rho\rho} \left(z + \frac{\dot{\sigma}}{\eta}y - \frac{\dot{f}}{2\eta}y^2 \right) + 6z_\rho^2 \\ &\quad + z_{4\rho} + \frac{z_\rho}{2t} + \frac{\alpha}{4t^2} \left[z_{\rho\rho} \left(\frac{f}{\eta}y - \frac{\sigma}{\eta} \right)^2 + z_\rho \frac{f}{\eta} - \frac{\dot{f}}{\eta} \right], \\ &= z_{\rho\theta} + 6zz_{\rho\rho} + 6z_\rho^2 + z_{4\rho} + z_\rho \left(\frac{1}{2t} + \frac{\alpha}{4t^2\eta}f \right) - \frac{\alpha\dot{f}}{4t^2\eta} + z_{\rho\rho} \left(-\frac{\alpha}{4t^2}\frac{\sigma^2}{\eta^2} - \frac{5}{2}\frac{\dot{f}}{\eta}y^2 + 5\frac{\dot{\sigma}}{\eta}y \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons ici imposer des formes plus particulières pour nos symétries afin de retrouver certaines équations bien connues.

Cas 1 : $\sigma = 0$ et $\eta = c/t$.

Dans ce cas-ci, nous avons

$$u = z(\theta, \rho), \quad \rho = x - \frac{t}{\alpha}y^2, \quad \theta = t,$$

où z doit satisfaire l'équation

$$(z_\theta + 6zz_\rho + z_{3\rho})_\rho = 0$$

ou encore

$$z_\theta + 6zz_\rho + z_{3\rho} = v(\theta)$$

qui est l'équation de Korteweg-de-Vries (KdV) forcée et telle que v est une fonction arbitraire de θ . Donc, en connaissant des solutions de KdV forcée ou non, nous pouvons obtenir des solutions non-triviales de cKP.

Cas 2 : $\sigma = 0$ et $\eta = c$.

En prenant cette symétrie, nous obtenons une solution de la forme

$$u = z(\rho, \theta), \quad \rho = x, \quad \theta = t$$

et où z doit respecter l'équation

$$z_\theta + 6zz_\rho + z_{3\rho} + \frac{z}{2\theta} = v(\theta).$$

Si nous effectuons la transformation $z = -\tilde{z}$, nous obtenons l'équation KdV cylindrique forcée

$$\tilde{z}_\theta - 6\tilde{z}\tilde{z}_\rho + \tilde{z}_{3\rho} + \frac{\tilde{z}}{2\theta} = \tilde{v}(\theta)$$

encore une fois où v est une fonction arbitraire de θ .

Suite à cet exemple, nous allons résumer la méthode à utiliser pour réduire les systèmes d'EDP.

1. Nous devons d'abord trouver tous les générateurs infinitésimaux \vec{v} des groupes de symétries du système en utilisant la méthode de prolongation expliquée précédemment dans ce chapitre.
2. Nous devons décider du degré de symétrie s des solutions invariantes, $1 \leq s \leq p$. Ce système réduit pour les solutions invariantes va dépendre de $p - s$ variables indépendantes. Pour réduire le système d'EDP à un système d'EDO, il est nécessaire de choisir que $s = p - 1$. En général, plus le s est petit, plus la solution va être invariante, mais plus le système va être difficile à solutionner explicitement.
3. Nous devons trouver tous les sous-groupes G de dimension s du groupe complet de symétrie trouvé en 1.

4. En déterminant le groupe de symétrie, nous pouvons construire un ensemble complet d'invariants fonctionnellement indépendants que nous divisons en deux types correspondants aux nouvelles variables indépendantes et dépendantes.
5. Nous devons, par la suite, calculer les différentes dérivées de notre ancien système de coordonnées vers les coordonnées invariantes en utilisant la règle en chaîne.
6. En substituant ces résultats dans notre équation de départ Δ , nous obtenons notre nouveau système réduit.
7. Nous devons finalement résoudre ce nouveau système pour obtenir les solutions invariantes sous l'effet du groupe choisi, puis les réécrire en terme des variables du système initial.

En répétant les étapes de 4 à 7 pour chaque groupe de symétrie G de l'étape 3, nous obtenons un ensemble complet de solutions invariantes pour notre système.

2.8 Test de Painlevé

Suite à la réduction par symétrie, il est intéressant de trouver des équations réduites intégrables au sens de Painlevé. Un moyen pour savoir si une équation différentielle est intégrable, c'est-à-dire que sa solution peut contenir seulement des pôles et non pas des singularités critiques, il faut qu'elle possède la propriété de Painlevé (pour plus de détails voir [26]). La condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'une équation différentielle possède cette propriété est qu'elle doit passer le test de Painlevé. Pour ce faire, nous devons tester l'existence de toutes les représentations locales de la solution générale via les séries de Laurent sur une variété non-caractéristique $\phi(x, t) = 0$ (telle que $\phi_x \neq 0$). Ce test peut être soit réussi peu importe ϕ et peut donc avoir la propriété de Painlevé, soit être réussi avec des conditions sur ϕ et donc peut être dite partiellement intégrable ou soit être échoué, ce qui est caractéristique aux équations différentielles chaotiques. Dans ce mémoire, seul le premier cas sera étudié.

Soit une équation différentielle (ordinaire ou partielle) donnée

$$\Delta[u] = 0 \quad (2.9)$$

qui est d'ordre N et polynomiale en u et ses dérivées, nous écrivons u en terme d'une série de Laurent en ξ

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \xi^{j-p}, \quad (2.10)$$

telle que ξ doit tendre vers 0 comme ϕ et où p doit être un entier positif. Il est important de noter que le choix d'un ξ explicite est indépendant du résultat du test. Les principaux choix de jauge pour le ξ sont la jauge de Weiss-Tabor-Carnevale $\xi = \phi$, la jauge de Weiss-Tabor-Carnevale sans dimension $\xi = \phi/\phi_x$, la jauge de Conte

$$\xi = \frac{\phi}{\phi_x - \phi\phi_{xx}/2\phi_x} \sim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi}{\phi_x}$$

ainsi que la jauge de Kruskal

$$\xi = x - x_0(t),$$

où x_0 est une fonction arbitraire de t . Ce dernier cas est le choix le plus simple pour le test, toutefois il ne peut pas être utilisé pour obtenir des paires de Lax ni pour trouver des solutions particulières.

Pour obtenir le couple (u_0, p) , il suffit de substituer la série de Laurent (2.10) dans notre équation différentielle de départ (2.9). Par la suite, il faut effectuer la balance entre les différents termes de cette expression polynômiale. Chaque solution différente de (u_0, p) définit une famille. Pour chaque $j \geq 1$, la relation de récurrence déterminant les u_j est

$$\forall j \geq 1 : P(j)u_j = Q_j(\{u_k, D_l u_k\}, k \in [0, j-1]),$$

où P est un polynôme de degré au plus N . Les besoins principaux pour que le test de Painlevé soit réussi sont que les zéros de $P(j)$, aussi appelés les résonances de Painlevé ou les indices de Fuchs, soient des entiers distincts et que pour chaque indice i et chaque choix de jauge ϕ , la condition de compatibilité tienne pour $Q_i = 0$.

Exemple 2.25 : Test de Painlevé pour l'EDO de Painlevé P1. À titre d'exemple simple, prenons la première transcendante de Painlevé

$$u_{tt} = 6u^2 + t. \quad (2.11)$$

Considérons le développement en série de Laurent

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{i-p}, \quad (2.12)$$

tel que $\xi = t - t_0$ et tel que la seconde dérivée de u par rapport à t est

$$u_{tt} = \sum_{i=0}^{\infty} (i-p)(i-p-1)u_i \xi^{i-p-2}. \quad (2.13)$$

En substituant les équations (2.12) et (2.13) dans notre équation de départ (2.11), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i-p)(i-p-1)u_i \xi^{i-p-2} = 6 \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{i-p} \right)^2 + t.$$

Pour trouver les termes dominants, nous allons prendre seulement les termes où $i = 0$, soit

$$p(p+1)u_0 \xi^{-p-2} = 6u_0 \xi^{-2p} + t. \quad (2.14)$$

Si nous essayons de balancer les ordres de ξ dans l'équation (2.14), nous voyons que le plus bas exposant que nous pouvons avoir en balançant les deux premiers termes est donné par $p = 2$. Si $p = 2$, nous voyons facilement que $u_0 = u_0^2$ et donc $u_0 = 1$. En substituant ces résultats dans l'équation (2.12), nous obtenons la série

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{i-2}, \quad u_0 = 1.$$

Pour trouver les résonances, il existe un petit truc calculatoire. En effet, si nous calculons seulement les coefficients de ξ^{m-p} pour un u de la forme

$$u = u_0 \xi^{-2} + u_m \xi^{m-2},$$

nous pouvons beaucoup plus rapidement trouver les résonances. Dans notre cas, nous obtenons

$$(m-2)(m-3)u_m \xi^{m-4} = 12u_0 u_m \xi^{m-4} = 12u_m \xi^{m-4}.$$

Nous pouvons aisément voir que le coefficient sort de l'équation et nous laisse la contrainte sur m

$$(m-2)(m-3) = 12$$

que nous pouvons réécrire comme

$$(m+1)(m-6) = 0.$$

En faisant les calculs, nous pouvons voir qu'il y a bien résonance pour $m = 6$ (et pour $m = -1$, mais puisque nous considérons seulement des entiers positifs pour i , ce cas n'est pas utile) qui est un entier positif, donc la première transcendante de Painlevé a réussi le test de Painlevé avec les coefficients

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{i-2},$$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$u_4 = -\frac{t_0}{10}, \quad u_5 = -\frac{1}{6}, \quad u_6 = c,$$

où c et t_0 sont des constantes arbitraires et où les coefficients u_j pour $j \geq 7$ dépendront uniquement des constantes c et t_0 .

Exemple 2.26 : Test de Painlevé pour l'équation de Sine-Gordon. Soit l'EDP de Sine-Gordon

$$\theta_{xt} = \sin \theta$$

que nous pouvons réécrire sous la forme rationnelle

$$yy_{xt} - y_x y_t = \frac{1}{2} (y^3 - y) \tag{2.15}$$

via la transformation

$$y = e^{i\theta}.$$

Il est à noter qu'il est toujours préférable de transformer l'équation de départ pour minimiser le nombre de termes à calculer. Dans ce cas-ci, nous avons pu passer d'un polynôme de dimensions infinie ($\sin \theta$) à un polynôme de dimension 3. Considérons le

développement pour y

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \xi^{i-p}$$

avec le choix de jauge de Kruskal $\xi = x - x_0(t)$. Nous pouvons facilement calculer toutes ses dérivées (nous allons noter \dot{x} pour $\partial x / \partial t$), soit

$$\begin{aligned} y_x &= \sum_{i=0}^{\infty} (i-p) y_i \xi^{i-p-1}, \\ y_t &= \sum_{i=0}^{\infty} [\dot{y}_i \xi^{i-p} + (i-p) y_i \dot{x}_0 \xi^{i-p-1}], \\ y_{xt} &= \sum_{i=0}^{\infty} [(i-p) \dot{y}_i \xi^{i-p-1} + (i-p)(i-p-1) y_i \dot{x}_0 \xi^{i-p-2}], \end{aligned}$$

puis les remplacer dans notre équation de départ (2.15). Par souci d'espace, nous ne considérons que les termes où $i = 0$ pour déterminer les termes dominants

$$\frac{y_0}{\xi^p} \left(\frac{p(p+1) \dot{x}_0 y_0}{\xi^{p+2}} \right) - \frac{y_0}{\xi^p} \frac{p \dot{y}_0}{\xi^p} + \frac{y_0}{\xi^p} \frac{p \dot{y}_0}{\xi^p} - \frac{p y_0}{\xi^{p+1}} \left(\frac{y_0 \dot{x}_0}{\xi^{p+1}} \right) = \frac{y_0^3}{2 \xi^{3p}} - \frac{y_0}{2 \xi^p}.$$

En simplifiant, nous obtenons

$$\frac{p^2 \dot{x}_0 y_0^2}{\xi^{2p+2}} = \frac{y_0^3}{2 \xi^{3p}} - \frac{y_0}{2 \xi^p}.$$

En égalant les puissances des ξ , nous obtenons deux choix

$$2p + 2 = 3p, \quad \Rightarrow \quad p = 2,$$

$$2p + 2 = p, \quad \Rightarrow \quad p = -2.$$

Le bon choix est le premier $p = 2$, dans le cas contraire, nous trouvons une série sans pôle. Donc, nous obtenons une équation pour y_0 , soit

$$p^2 \dot{x}_0 y_0^2 = 4 \dot{x}_0 y_0^2 = y_0^3$$

et donc

$$y_0 = 4 \dot{x}_0.$$

Pour trouver les résonances, considérons un y sous la forme

$$y = \frac{4 \dot{x}_0}{\xi^2} + y_m \xi^{m-2}$$

et substituons cette forme dans notre équation de départ (2.15) et observons seulement les coefficients devant les ξ^{m-6}

$$\xi^{m-6} : \quad 4(m-2)(m-3)\dot{x}_0^2 y_m + 24\dot{x}_0^2 y_m + 8(m-2)\dot{x}_0^2 y_m + 8(m-2)\dot{x}_0^2 y_m = 24\dot{x}_0^2 y_m,$$

nous pouvons simplifier le tout pour obtenir le polynôme

$$(m+1)(m-2) = 0.$$

Il y a donc résonance quand $m = 2$. Si nous calculons les trois premiers coefficients, nous obtenons la série

$$y = \frac{4\dot{x}_0}{\xi^2} + 0 + C(t) + \dots$$

où x_0 et C sont deux fonctions arbitraires de t et où les coefficients d'ordre plus élevé vont seulement dépendre de ces fonctions.

Chapitre 3

Symétries d'équations différentielles ordinaires et leurs surfaces solitoniques

Ce chapitre porte principalement sur les surfaces solitoniques associées aux EDO. Nous caractérisons ces surfaces via les premières et deuxièmes formes fondamentales ainsi que les courbures (de Gauss ou moyenne) au moyen de leur paire de Lax et de la forme de Killing. Nous cherchons aussi à construire les surfaces solitoniques bidimensionnelles associées à ces EDO. Dans ce chapitre, nous avons généré de nouvelles surfaces solitoniques associées à certaines fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass ainsi que pour le problème de Sturm-Liouville. Ce chapitre est basée sur les livres [78,83] ainsi que les articles [48,49,51].

Nous allons tout d'abord établir la notation que nous allons utiliser, soit la notation standard du livre de P. J. Olver [78]. Considérons u , une fonction de x , alors nous écrivons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = u_J, \quad J = (x, \dots, x), \quad |J| = n,$$

où J est un multi-indice. Alors, une fonction f définie sur l'espace de Jet est notée

$$f(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) \equiv f[u], \quad f(\lambda, x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots) \equiv f(\lambda, y, [u]).$$

La dérivée totale est donnée par

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + \dots + u_{Jx} \frac{\partial}{\partial u_J} + \dots, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il est à noter que $u_y = 0$ ainsi que $[D_x, D_y] = 0$.

Si nous prenons un champ de vecteurs généralisés sous la forme d'une représentation d'évolution et sa prolongation,

$$\vec{v}_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} \iff \text{pr}(\vec{v}_Q) = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} + D_J Q \frac{\partial}{\partial u_J},$$

il est une symétrie d'une EDO non-dégénérée $\Delta[u] = 0$ si et seulement si

$$\text{pr}(\vec{v}_Q)(\Delta[u]) = 0 \quad \text{lorsque} \quad \Delta[u] = 0.$$

3.1 Surfaces solitoniques associées aux équations différentielles ordinaires intégrables

Considérons une EDO

$$\Delta[u] \equiv \Delta(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{3.1}$$

qui admet une paire de Lax avec des matrices potentielles $L(\lambda, [u])$ et $M(\lambda, [u])$ ayant leurs valeurs dans une algèbre de Lie \mathfrak{g} qui est une représentation équivalente à (3.1) vérifiant

$$D_x M + [M, L] = 0 \quad \text{lorsque} \quad \Delta[u] = 0, \tag{3.2}$$

telle qu'elle est intégrable si elle ne dépend pas du paramètre spectral λ . Cette représentation de Lax (3.2) peut être considérée comme étant les conditions de compatibilité

du problème linéaire spectral (PLS) pour les fonctions d'onde ϕ ayant leurs valeurs dans le groupe de Lie G où nous introduisons une variable auxiliaire y

$$\begin{aligned} D_x \phi(\lambda, y, [u]) &= L(\lambda, [u])\phi(\lambda, y, [u]), \\ D_y \phi(\lambda, y, [u]) &= M(\lambda, [u])\phi(\lambda, y, [u]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

À cause de la condition de compatibilité $D_x D_y \phi = D_y D_x \phi$, nous avons que

$$\begin{aligned} D_x D_y \phi &= D_x(M\phi) = D_y(L\phi), \\ D_x M\phi + M D_x \phi &= D_y L\phi + L D_y \phi, \\ D_x M\phi + M L\phi &= D_y L\phi + L M\phi, \\ D_x M + M L &= D_y L + L M \end{aligned}$$

et donc

$$D_x M - D_y L + [M, L] = D_x M + [M, L] = 0.$$

Puisque L ne dépend pas de y , nous retrouvons la représentation de Lax (3.2).

Théorème 3.1 (39). *Pour toutes fonctions matricielles $A(\lambda, y, [u])$ et $B(\lambda, y, [u])$ ayant leurs valeurs dans \mathfrak{g} et vérifiant*

$$D_y A - D_x B + [A, M] + [L, B] = 0, \tag{3.4}$$

il existe une fonction d'immersion F avec les valeurs dans \mathfrak{g} dont les vecteurs tangents sont donnés par

$$D_x F = \phi^{-1} A \phi \quad \text{et} \quad D_y F = \phi^{-1} B \phi. \tag{3.5}$$

Lorsque A et B sont linéairement indépendants, F est une fonction d'immersion pour une surface $2D$ plongée dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Preuve : Soit

$$\phi \phi^{-1} = I,$$

nous avons donc que

$$0 = D_x(I) = D_x(\phi \phi^{-1}) = (D_x \phi) \phi^{-1} + \phi (D_x \phi^{-1}),$$

$$D_x \phi^{-1} = -\phi^{-1}(D_x \phi)\phi^{-1}$$

et en vertu de l'équation (3.3), nous trouvons que

$$D_x \phi^{-1} = -\phi^{-1}L.$$

De façon similaire, nous pouvons trouver pour D_y que

$$D_y \phi^{-1} = -\phi^{-1}M.$$

En dérivant les équations (3.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} D_y D_x F &= -\phi^{-1}MA\phi + \phi^{-1}(D_y A)\phi + \phi^{-1}A(D_y \phi), \\ D_x D_y F &= -\phi^{-1}LB\phi + \phi^{-1}(D_x B)\phi + \phi^{-1}B(D_x \phi), \\ \Rightarrow -\phi^{-1}MA\phi + \phi^{-1}(D_y A)\phi + \phi^{-1}AM\phi + \phi^{-1}LB\phi \\ &\quad - \phi^{-1}(D_x B)\phi - \phi^{-1}BL\phi = 0, \\ \Rightarrow -MA + D_y A + AM + LB - D_x B - BL &= 0 \end{aligned}$$

et donc nous retrouvons (3.4)

$$D_y A - D_x B + [A, M] + [L, B] = 0.$$

Comme il a été démontré dans [23,39,49,88,89], les trois termes linéairement indépendants vérifiant (3.4) sont

$$\begin{aligned} A &= a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} L + (D_x S + [S, L]) + \text{pr}(\vec{v}_Q)L, \\ B &= a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} M + (D_y S + [S, M]) + \text{pr}(\vec{v}_Q)M, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $a = a(\lambda) \in \mathbb{C}$, $S = S(\lambda, y, [u])$ est un élément arbitraire de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et \vec{v}_Q est une symétrie généralisée de l'EDO $\Delta = 0$. Le premier terme est associé à une symétrie spectrale, tandis que le second terme représente une symétrie par rapport à la jauge et le dernier terme est une symétrie généralisée de l'équation différentielle ainsi que du PLS. De plus, il a été démontré dans [49] que la fonction F avec des valeurs dans \mathfrak{g} peut être intégrée explicitement comme

$$F = a(\lambda) \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \phi^{-1} S \phi + \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi \in \mathfrak{g}$$

pourvu que \vec{v}_Q soit une symétrie généralisée du PLS (3.3) ainsi que de l'EDO (3.1) $\Delta = 0$, en ce sens que

1. $\text{pr}(\vec{v}_Q)(D_x M + [M, L]) = 0$ lorsque $D_x M + [M, L] = 0$,
2. $\text{pr}(\vec{v}_Q)(D_x \phi - L\phi) = 0$ lorsque $D_x \phi - L\phi = 0$,
3. $\text{pr}(\vec{v}_Q)(D_y \phi - M\phi) = 0$ lorsque $D_y \phi - M\phi = 0$,

où nous considérons seulement les symétries communes.

3.1.1 Formule d'immersion de Sym-Tafel

Considérons le premier terme dans (3.6) qui admet une symétrie de (3.1) conforme en paramètre spectral qui obéit à (3.4)

$$A = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} L, \quad B = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} M,$$

où $a(\lambda)$ est une fonction arbitraire de λ . Le premier terme en A et le premier terme en B correspondent à la formule d'immersion de Sym-Tafel donnée par la forme intégrée de la surface

$$F^{ST} = a(\lambda) \phi^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi.$$

Cette surface F^{ST} possède des vecteurs tangents de la forme

$$D_x F^{ST} = a \phi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} L \right) \phi, \quad D_y F^{ST} = a \phi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} M \right) \phi. \quad (3.7)$$

Si les vecteurs tangents dans (3.7) sont linéairement indépendants, alors la surface F^{ST} existe et donne un plongement d'une surface 2D dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

3.1.2 Transformation de jauge

Considérons les seconds termes de l'équation (3.6)

$$A = D_x S + [S, L] \quad \text{et} \quad B = D_y S + [S, M].$$

Le second terme en A et le second terme en B correspondent à la symétrie de jauge du PLS. La surface F^S correspondant à ce terme de jauge peut être intégrée explicitement comme (voir [23,39])

$$F^S = \phi^{-1} S(\lambda, y, [u]) \phi,$$

si les vecteurs tangents sont linéairement indépendants

$$D_x F^S = \phi^{-1} (D_x S + [S, L]) \phi, \quad D_y F^S = \phi^{-1} (D_y S + [S, M]) \phi.$$

En effet, nous démontrons que ces vecteurs tangents respectent l'équation (3.4).

$$\begin{aligned} D_y D_x F^S &= -\phi^{-1} (D_y \phi) \phi^{-1} (D_x S + [S, L]) \phi + \phi^{-1} (D_x S + [S, L]) D_y \phi \\ &\quad + \phi^{-1} (D_y D_x S + [D_y S, L] + [S, D_y L]) \phi, \\ D_x D_y F^S &= -\phi^{-1} (D_x \phi) \phi^{-1} (D_y S + [S, M]) \phi + \phi^{-1} (D_y S + [S, M]) D_x \phi \\ &\quad + \phi^{-1} (D_x D_y S + [D_x S, M] + [S, D_x M]) \phi \end{aligned}$$

et comme $D_x D_y F^S = D_y D_x F^S$, nous avons

$$\begin{aligned} &-M(D_x S + [S, L]) + (D_y D_x S + [D_y S, L]) + (D_x S + [S, L])M \\ &= -L(D_y S + [S, M]) + (D_x D_y S + [D_x S, M] + [S, D_x M]) \\ &\quad + (D_y S + [S, M])L, \\ &[D_x S + [S, L], M] + [D_y S, L] + [L, D_y S + [S, M]] + [M, D_x S] + [D_x M, S] = 0, \\ &D_x [M, S] + D_y [S, L] + [D_x S + [S, L], M] + [L, D_y S + [S, M]] = 0, \\ &D_x [M, S] + D_y [S, L] + [A, M] + [L, B] = 0 \end{aligned}$$

et nous retrouvons finalement l'équation (3.4)

$$D_y A - D_x B + [A, M] + [L, B] = 0.$$

Pour que F représente le plongement d'une surface, il est nécessaire que les vecteurs tangents soient linéairement indépendants.

Théorème 3.2. : transformation de jauge. Si A et B sont une symétrie de jauge du PLS et sont linéairement indépendants,

$$A = D_x S + [S, L], \quad B = D_y S + [S, M],$$

et nous avons les vecteurs tangents

$$D_x F^S = \phi^{-1} (D_x S + [S, L]) \phi, \quad D_y F^S = \phi^{-1} (D_y S + [S, M]) \phi,$$

alors nous pouvons intégrer afin obtenir F^S sous la forme

$$F^S = \phi^{-1} S(\lambda, y, [u]) \phi \in \mathfrak{g}.$$

3.1.3 Symétries généralisées

Les troisièmes termes en A et en B correspondent aux symétries généralisées (voir [49]). Supposons que \vec{v}_Q est une symétrie généralisée d'une équation différentielle équivalente à une paire de Lax dans une représentation de courbure nulle

$$\Delta = 0 \iff D_y L - D_x M + [L, M] = 0.$$

Les matrices

$$A = \text{pr}(\vec{v}_Q)L, \quad B = \text{pr}(\vec{v}_Q)M,$$

obéissent à (3.4). En effet,

$$\begin{aligned} & D_y A - D_x B + [A, M] + [L, B] \\ &= D_y (\text{pr}(\vec{v}_Q)L) - D_x (\text{pr}(\vec{v}_Q)M) + [\text{pr}(\vec{v}_Q)L, M] + [L, \text{pr}(\vec{v}_Q)M], \\ &= \text{pr} (D_y L - D_x M + [L, M]), \\ &= 0, \quad \text{lorsque} \quad \Delta = 0. \end{aligned}$$

Ici, nous utilisons le fait que la dérivée totale commute avec la prolongation du champ vectoriel. (Voir [78] page 300, Lemme 5.12.)

Donc, il existe une fonction d'immersion F avec ses valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et où les vecteurs tangents sont

$$D_x F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi, \quad D_y F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi.$$

Si A et B sont linéairement indépendants, alors la fonction F peut être intégrée comme

$$F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi \in \mathfrak{g} \quad (3.8)$$

si et seulement si \vec{v}_Q est une symétrie généralisée du PLS, c'est-à-dire

$$D_x F = -\phi^{-1} L \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi + \phi^{-1} D_x \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi,$$

$$D_x F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (D_x \phi) - \phi^{-1} L \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi,$$

$$D_x F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (D_x \phi) - \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (L \phi) + \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_Q) L) \phi,$$

$$D_x F = \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_Q) L) \phi.$$

Ceci est équivalent au critère de symétrie

$$\text{pr}(\vec{v}_Q) (D_x \phi - L \phi) = 0, \quad \text{lorsque} \quad D_x \phi - L \phi = 0.$$

Il en est de même pour B , en effet

$$D_y F = -\phi^{-1} M \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi + \phi^{-1} D_y \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi,$$

$$D_y F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (D_y \phi) - \phi^{-1} M \text{pr}(\vec{v}_Q) \phi,$$

$$D_y F = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (D_y \phi) - \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_Q) (M \phi) + \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_Q) M) \phi,$$

$$D_y F = \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_Q) M) \phi,$$

ce qui est équivalent au critère de symétrie

$$\text{pr}(\vec{v}_Q) (D_y \phi - M \phi) = 0, \quad \text{lorsque} \quad D_y \phi - M \phi = 0.$$

3.2 Description des surfaces

3.2.1 Surface conformément paramétrisée

Soit \mathcal{F} une surface lisse et orientable dans un espace euclidien de dimension 3. La métrique euclidienne induit une métrique Ω sur cette surface, qui à son tour génère la structure complexe d'une surface \mathcal{R} de Riemann. Sous une telle paramétrisation, qui est dite conforme, la surface \mathcal{F} est donnée par les vecteurs tangents :

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et la métrique est conforme :

$$\Omega = e^{u_i} dz_i d\bar{z}_i,$$

où z_i est une coordonnée locale sur \mathcal{R} . Si elle est conforme, on peut toujours transformer z comme $f(z)$ et \bar{z} comme $\overline{f(z)}$, soit, respectivement, des transformations holomorphe et anti-holomorphe. La paramétrisation conforme donne les normalisations des fonctions $F(z, \bar{z})$

$$\langle F_z, F_z \rangle = \langle F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} \rangle = 0$$

et aussi

$$\langle F_z, F_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} e^u,$$

où les crochets représentent le produit scalaire

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

À partir de ces relations de normalisation, nous sommes capables de trouver la première forme fondamentale

$$I = \langle F_z, F_z \rangle dz^2 + 2 \langle F_z, F_{\bar{z}} \rangle dz d\bar{z} + \langle F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} \rangle d\bar{z}^2,$$

$$I = e^u dz d\bar{z}.$$

Il est à noter que si nous effectuons le changement de coordonnées suivant

$$z = x + iy,$$

nous obtenons les dérivées partielles pour z et \bar{z}

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

ou encore pour x et y

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Ici, nous avons adopté une notation telle que F_z et $F_{\bar{z}}$ représentent la dérivée de la fonction par rapport à son indice, soit respectivement $\frac{\partial F}{\partial z}$ et $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$. Nous pouvons définir N , le vecteur normal à la surface, de la façon suivante

$$\langle F_z, N \rangle = \langle F_{\bar{z}}, N \rangle = 0, \quad \langle N, N \rangle = 1.$$

Définition 3.1. On va noter $\sigma = (F_z, F_{\bar{z}}, N)^T$, les équations du repère mobile sur une surface satisfont les équations de Gauss-Weingarten (GW)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \mathcal{U}\sigma, & \sigma_{\bar{z}} &= \mathcal{V}\sigma, \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial z} &= \mathcal{U}_{jk}\sigma_k, & \frac{\partial \sigma_j}{\partial \bar{z}} &= \mathcal{V}_{jk}\sigma_k. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les matrices \mathcal{U} et \mathcal{V} sont fonctions de u, H, Q , où

$$\begin{aligned} Q &= \langle (F_z)_z, N \rangle, & \langle (F_z)_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{2} H e^u, \\ \mathcal{U} &= \begin{bmatrix} u_z & 0 & Q \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} H e^u \\ -H & -2e^{-u}Q & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{V} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} H e^u \\ 0 & u_z & \bar{Q} \\ -2e^{-u}\bar{Q} & -H & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Qdz^2 est appelé le différentiel de Hopf. Cela est bien défini sur la surface et cette grandeur Qdz^2 est invariante sous transformation conforme

$$\langle dF, dF \rangle = \left\langle \mathbf{I} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$-\langle dF, dN \rangle = \left\langle \text{II} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\tilde{I} = (dF, dF) = e^u dz d\bar{z},$$

$$\tilde{I}I = (d^2F, N) = Q dz^2 + H e^u dz d\bar{z} + \bar{Q} d\bar{z}^2,$$

$$I = e^u \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{II} = \begin{bmatrix} Q + \bar{Q} H e^u & i(Q - \bar{Q}) \\ i(Q - \bar{Q}) & -(Q + \bar{Q}) + H e^u \end{bmatrix}.$$

Les courbures principales k_1 et k_2 sont les valeurs de la matrice $\text{II} \cdot I^{-1}$. La courbure de Gauss K et la courbure moyenne H sont données par

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{II} \cdot I^{-1}),$$

$$K = k_1 k_2 = \det(\text{II} \cdot I^{-1}) = H^2 - 4Q\bar{Q}e^{-2u}.$$

Le point ombilic P d'une surface \mathcal{F} , est un point où les courbures principales sont égales

$$k_1(P) = k_2(P).$$

Proposition 3.1. *Le différentiel de Hopf $Q(P)$ est nul exactement au point ombilic de la surface*

$$H^2 - K = 0.$$

La condition de compatibilité de GW est donnée par les équations de Gauss-Manardi-Codazzi (GMC)

$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0.$$

Nous pouvons vérifier la compatibilité de l'équation (3.9) pour obtenir l'équation ci-dessus

$$\sigma_{z\bar{z}} = \mathcal{U}_{\bar{z}}\sigma + \mathcal{U}\mathcal{V}\sigma = \mathcal{V}_z\sigma + \mathcal{V}\mathcal{U}\sigma,$$

donc

$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial \begin{pmatrix} \partial F \\ \bar{\partial} F \\ N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & b_{11} \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & b_{21} \\ -b_1^1 & -b_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial F \\ \bar{\partial} F \\ N \end{pmatrix}, \\ \bar{\partial} \begin{pmatrix} \partial F \\ \bar{\partial} F \\ N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & b_{12} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & b_{22} \\ -b_2^1 & -b_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial F \\ \bar{\partial} F \\ N \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où Γ_{jk}^i sont les symboles de Christoffel et où les b_{ij} sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale. Nous avons les conditions

- | | |
|--|---|
| 1. $\langle \partial F, \partial F \rangle = 0$, | 6. $\langle N, N \rangle = 1$, |
| 2. $\langle \bar{\partial} F, \bar{\partial} F \rangle = 0$, | 7. $\langle \partial^2 F, N \rangle = Q$, |
| 3. $\langle \partial F, \bar{\partial} F \rangle = \frac{1}{2}e^u$, | 8. $\langle \partial \bar{\partial} F, N \rangle = \frac{1}{2}He^u$, |
| 4. $\langle \partial F, N \rangle = 0$, | 9. $\partial \langle \partial F, \partial F \rangle = 0$, |
| 5. $\langle \bar{\partial} F, N \rangle = 0$, | 10. $\bar{\partial} \langle \partial F, \partial F \rangle = 0$. |

Les équations de compatibilité pour les équations GW nous donnent

$$\text{éq de Gauss} \longrightarrow u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^u - 2|Q|^2e^{-u} = 0, \quad (3.10)$$

$$\text{éq de Codazzi} \longrightarrow Q_{\bar{z}} - \frac{1}{2}H_z e^u = 0. \quad (3.11)$$

Si nous posons que $Q = 0$, alors de l'équation (3.11), nous pouvons voir que H doit être une constante pour que l'équation soit satisfaite. En reportant ces résultats dans l'équation (3.10), nous obtenons

$$u_{z\bar{z}} = -\frac{1}{2}H^2e^u,$$

soit l'équation de Liouville complexe.

Théorème 3.3. : Théorème de Bonnet. *Si $e^u dz d\bar{z}$ est donné et le différentiel de Hopf $Q dz^2$ ainsi que la fonction H satisfont les équations de Gauss-Codazzi, alors il existe un vecteur d'immersion*

$$F : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

où $\tilde{\mathcal{R}}$ est le recouvrement universel de \mathcal{R} . Cette immersion est unique jusqu'à une transformation affine (translation et rotation).

3.2.2 Description quaternionique des surfaces

Il est commode d'utiliser les algèbres de Lie et d'utiliser les isomorphismes $SO(3)$ équivalents à $SU(2)$. Ceci nous permet d'écrire les équations de GW (qui sont des matrices 3×3) sous une forme de représentation de Lax pour les équations différentielles. Pour faire cela, nous utilisons l'algèbre des quaternions \mathbb{H} et nous considérons le « multiplicative quaternion group » dénoté $\mathbb{H}_* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ où la base standard est $\{1, i, j, k\}$ avec les propriétés

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j.$$

Nous pouvons utiliser les matrices de Pauli σ_α à titre de représentation pour les quaternions

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto 1, & \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto ii, \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \mapsto ij, & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto ik, \\ \sigma_i \sigma_j &= i \epsilon_{ijk} \sigma_k, & \sigma_i^2 &= \sigma_0 = 1, & \sigma_i &= \sigma_i^\dagger. \end{aligned}$$

Nous allons représenter l'espace euclidien avec la partie imaginaire des quaternions

$$X = -i \sum_{\alpha=1}^3 X_\alpha \sigma_\alpha \in \text{Im}(\mathbb{H}) \longleftrightarrow X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.12)$$

Le produit scalaire des vecteurs en terme des matrices est le suivant

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XY) = -\text{Re}(XY),$$

$$XY = -\langle X, Y \rangle I + X \times Y,$$

$$X \times Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

On associe aux vecteurs F et N des matrices F et N dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ en vertu de la transformation (3.12). Si $\Phi \in SU(2)$ et i, j, k forment la base qui correspond au repère mobile F_x, F_y, N , alors les vecteurs tangents et le vecteur normal sont

$$\begin{aligned} F_x &= e^{u/2} \Phi^{-1} i \Phi, \\ F_y &= e^{u/2} \Phi^{-1} j \Phi, \\ N &= \Phi^{-1} k \Phi \end{aligned} \quad (3.13)$$

et dans les complexes,

$$\begin{aligned} F_z &= -ie^{u/2} \Phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Phi, & F_{\bar{z}} &= -ie^{u/2} \Phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi, \\ \langle F_z, F_z \rangle &= 0 = \langle F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} \rangle = \text{Tr}(F_z F_z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le quaternion Φ satisfait

$$\begin{aligned} \partial F &= -iu^{u/2} \Phi^{-1} i \Phi, \\ \bar{\partial} F &= -ie^{u/2} \Phi^{-1} j \Phi, \\ N &= \Phi^{-1} k \Phi. \end{aligned}$$

Nous avons aussi les équations

$$\mathcal{U} = \phi_z \phi^{-1}, \quad \mathcal{V} = \phi_{\bar{z}} \phi^{-1}$$

et nous voyons que \mathcal{U} et \mathcal{V} satisfont les conditions de compatibilité (courbure nulle).

$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0.$$

Comme les traces de \mathcal{U} et de \mathcal{V} sont nulles, nous avons

$$\mathcal{V}_{22} = -\mathcal{V}_{11} = \frac{u_{\bar{z}}}{2}, \quad \mathcal{U}_{11} = -\mathcal{U}_{22} = \frac{u_z}{2}, \quad \mathcal{U}_{21} = -\mathcal{V}_{12}.$$

Si \mathcal{U}_{kl} et \mathcal{V}_{kl} sont les éléments de matrice de \mathcal{U} et \mathcal{V} , ceci implique

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2} H e^u N \longrightarrow \mathcal{U}_{21} = -\mathcal{V}_{12} = \frac{1}{2} H e^{u/2}, \\ F_{zz} &= \mathcal{U}_z F_z + Q N \longrightarrow \mathcal{U}_{12} = -Q e^{-u/2}, \\ F_{\bar{z}\bar{z}} &= \mathcal{U}_{\bar{z}} F_{\bar{z}} + \bar{Q} N \longrightarrow \mathcal{V}_{21} = \bar{Q} e^{-u/2}. \end{aligned}$$

Théorème 3.4. *En utilisant l'isomorphisme entre $SO(3)$ et $SU(2)$, le repère mobile $F_z, F_{\bar{z}}, N$ d'une surface (conformément) paramétrisée est décrit par les équations (3.13) et (3.14), où $\Phi \in SU(2)$ et les matrices \mathcal{U} et \mathcal{V} sont*

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \frac{u_z}{4} & -Qe^{-u/2} \\ \frac{1}{2}He^{u/2} & -\frac{u_{\bar{z}}}{4} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \frac{-u_{\bar{z}}}{4} & \frac{-1}{2}He^{u/2} \\ \bar{Q}e^{-u/2} & \frac{u_{\bar{z}}}{4} \end{bmatrix},$$

ou en terme de x, y ,

$$\Phi_x \phi^{-1} = \begin{bmatrix} -i\frac{u_y}{4} & -Qe^{-u/2} - \frac{1}{2}He^{u/2} \\ \bar{Q}e^{-u/2} + \frac{1}{2}He^{u/2} & i\frac{u_y}{4} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_y \phi^{-1} = i \begin{bmatrix} \frac{u_x}{4} & -Qe^{-u/2} + \frac{1}{2}He^{u/2} \\ -\bar{Q}e^{-u/2} + \frac{1}{2}He^{u/2} & -\frac{u_x}{4} \end{bmatrix}.$$

Les surfaces peuvent être caractérisées par trois coefficients. Ce théorème a été découvert par Bonnet.

3.2.3 Formule d'immersion de Enneper-Weierstrass

Soit une surface lisse bidimensionnelle et orientable immergée dans un espace de dimension 3,

$$X = (X_1, X_2, X_3) : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X_i = X_i(z, \bar{z})$$

et où nous assumons que la métrique est conforme

$$ds^2 = e^{2u} dz d\bar{z}.$$

La normalisation des vecteurs de position est donnée par

$$\begin{aligned} (\partial X, \partial X) &= 0, & (\bar{\partial} X, \bar{\partial} X) &= 0, & (\partial X, \bar{\partial} X) &= \frac{1}{2}e^{2u}, \\ (\partial X, N) &= 0, & (\bar{\partial} X, N) &= 0, & (N, N) &= 0. \end{aligned}$$

Le repère mobile sur la surface est noté

$$\xi = (\partial X, \bar{\partial} X, N)^T.$$

De là, les équations de Gaus-Weierstrass (GW) sont données par

$$\partial \xi = \mathcal{U} \xi, \quad \bar{\partial} \xi = \mathcal{V} \xi,$$

où

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2\partial u & 0 & J \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} H e^{2u} \\ -H & -2e^{-2u} J & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} H e^{2u} \\ 0 & 2\bar{\partial} u & \bar{J} \\ -2e^{-2u} \bar{J} & -H & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$J := (\partial^2 X, N), \quad H := 2e^{-2u}(\bar{\partial} \partial X, N).$$

Les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (GMC) sont alors

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} u + \frac{1}{4} H^2 e^{2u} - |J|^2 e^{-2u} &= 0, \\ \bar{\partial} J &= \frac{1}{2} e^{2u} \partial H, \quad \partial J = \frac{1}{2} e^{2u} \bar{\partial} H. \end{aligned}$$

Il est à noter que si J n'est pas holomorphe, alors H n'est pas constant. De plus, le signe de J n'est pas pertinent dans les équations de GMC si J est holomorphe.

Nous allons dériver les formules originales de Ennerper-Weierstrass (FEW) pour l'immersion de surfaces dans \mathbb{R}^3 pour lesquelles les équations de GMC et GW sont satisfaites. Considérons un vecteur complexe

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \bar{\partial} X \text{ ou } \partial X, \quad \omega_i \in \mathbb{C},$$

une matrice 2×2 de trace nulle

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}$$

et une application

$$\vec{\omega} : \mathbb{C} \rightarrow \omega = \omega_i \sigma_i \in \mathfrak{su}(2)$$

qui satisfait

$$(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\det(\omega).$$

Si le déterminant est nul, alors le produit scalaire est $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0$. Ce qui correspond aux conditions de départ

$$(\partial X, \partial X) = 0, \quad (\bar{\partial} X, \bar{\partial} X) = 0.$$

De là, il existe un spineur complexe à deux composantes $\Phi = (\psi_1, \psi_2)^T \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\omega = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} \otimes (-\bar{\psi}_2, \psi_1) = \begin{pmatrix} -\psi_1 \bar{\psi}_2 & \psi_1 \psi_1 \\ -\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_2 & \psi_1 \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}.$$

Donc, le vecteur nul $\vec{\omega}$ s'écrit en termes du spineur Φ

$$\begin{aligned} \bar{\partial} X_1 = \omega_1 &= \frac{1}{2} (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2), & \partial X_1 = \bar{\omega}_1 &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2), \\ \bar{\partial} X_2 = \omega_2 &= \frac{i}{2} (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2), & \partial X_2 = \bar{\omega}_2 &= -\frac{i}{2} (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2), \\ \bar{\partial} X_3 = \omega_3 &= -\psi_1 \bar{\psi}_2, & \partial X_3 = \bar{\omega}_3 &= -\bar{\psi}_1 \psi_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assumons que ψ_1, ψ_2 sont des fonctions holomorphes, c'est-à-dire

$$\bar{\partial} \psi_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

En intégrant l'équation (3.15) et en prenant en compte les conditions de réalité

$$X_i(z, \bar{z}) = \bar{X}_i(z, \bar{z}), \quad i = 1, 2, 3,$$

nous obtenons FEW, (qui avait été découverte en 1864-1866 indépendamment par Enneper et Weierstrass)

$$\begin{aligned} X_1(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_0^z (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2) dz' + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2) d\bar{z}', \\ X_2(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_0^z (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) dz' - \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) d\bar{z}', \\ X_3(z, \bar{z}) &= - \int_0^z \bar{\psi}_1 \psi_2 dz' - \int_0^{\bar{z}} \psi_1 - \bar{\psi}_2 d\bar{z}'. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De la condition restante

$$(\partial X, \bar{\partial} X) = \frac{1}{2} e^{2u}$$

et de l'équation (3.16), nous obtenons

$$u = \ln(p), \quad \text{où} \quad p = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \neq 0.$$

En substituant ce résultat dans les équations de GMC, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} \ln(p^2) + \frac{1}{2} H^2 p^2 - |J|^2 p^{-2} &= 0, \\ \bar{\partial} J &= 2p^2 \partial H, \quad \partial \bar{J} = 2p^2 \bar{\partial} H. \end{aligned}$$

Exemple 3.1 : La formule généralisée d'immersion de surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Soit ψ_1 et ψ_2 des fonctions complexes de z et de $\bar{z} \in \mathbb{C}$ telles qu'elles satisfassent les équations de type Dirac

$$\partial \psi_1 = q \psi_2, \quad \bar{\partial} \psi_2 = -q \psi_1, \quad q : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

où q est une fonction à valeur réelle de z et \bar{z} . L'équation (3.17) implique les lois de conservation suivantes

$$\begin{aligned} \partial(\psi_1^2) + \bar{\partial}(\psi_2^2) &= 0, \\ \partial(\bar{\psi}_2^2) + \bar{\partial}(\bar{\psi}_1^2) &= 0, \\ \partial(\psi_1 \bar{\psi}_2) - \bar{\partial}(\bar{\psi}_1 \psi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Il est à noter que nous devons au moins avoir le même nombre de lois de conservation que de dimensions. Il est possible d'obtenir ces lois de conservation et plusieurs autres au moyen de l'opérateur d'homotopie que nous allons traiter au chapitre 5.

Comme conséquence des lois de conservation (3.18), nous définissons

$$\begin{aligned} \bar{\partial} X_1 &:= \frac{1}{2} (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2), & \partial X_1 &:= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2), \\ \bar{\partial} X_2 &:= \frac{i}{2} (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2), & \partial X_2 &:= -\frac{i}{2} (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2), \\ \bar{\partial} X_3 &:= -\psi_1 \bar{\psi}_2, & \partial X_3 &:= -\bar{\psi}_1 \psi_2. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions de réalité $X_i(z, \bar{z}) = \bar{X}_i(z, \bar{z})$ pour $i = 1, 2, 3$, nous

intégrons et nous retrouvons FEW [93,37]

$$\begin{aligned} X_1(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2) dz' + (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2) d\bar{z}', \\ X_2(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \int_{\gamma} (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) dz' - (\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) d\bar{z}', \\ X_3(z, \bar{z}) &= - \int_{\gamma} (\bar{\psi}_1 \psi_2 dz' + \psi_1 - \bar{\psi}_2 d\bar{z}'). \end{aligned}$$

Les équations pour le repère complexe satisfont les équations de Gauss-Weierstrass et sont satisfaites par les contraintes suivantes sur les deux composantes du spineur Φ

$$\begin{aligned} J &= \psi_2 \partial \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_1 \partial \psi_2, & H &= q/p, \\ u &= \ln p, & p &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2. \end{aligned}$$

Les première et deuxième formes fondamentales sont données par

$$\begin{aligned} (dx, dx) &= \left(\hat{I} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right), & z &= x + iy, \\ -(dx, dN) &= \left(\hat{I} I \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right), \\ \hat{I} &= e^{2u} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{I} I &= \begin{pmatrix} J + \bar{J} + H e^{2u} & i(J - \bar{J}) \\ i(J - \bar{J}) & -(J + \bar{J}) + H e^{2u} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les vecteurs tangents et normal sont

$$\begin{aligned} \partial X &= (\bar{\psi}_1^2 - \psi_2^2, i(\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2), -2\bar{\psi}_1 \psi_2), \\ \bar{\partial} X &= (\psi_1^2 - \bar{\psi}_2^2, -i(\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2), -2\psi_1 \bar{\psi}_2), \\ N &= -i \frac{\partial X \times \bar{\partial} X}{|\partial X \times \bar{\partial} X|} = \frac{1}{p} (\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2, i(\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - \psi_1 \psi_2), |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2). \end{aligned}$$

Les courbures Gaussienne et moyenne sont respectivement

$$\begin{aligned} K &= \det(\hat{I} I \cdot \hat{I}^{-1}) = -\dot{p}^2 \partial \bar{\partial} \ln p, \\ H &= \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{I} I \cdot \hat{I}^{-1}) = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

Les équations correspondantes pour GMC prennent la forme

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} \ln p^2 + \frac{1}{2} q^2 - 2|J|^2 p^{-2} &= 0, \\ \bar{\partial} J &= 2(p \partial q - q \partial p), & \partial \bar{J} &= 2(p \bar{\partial} q - q \bar{\partial} p). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dans le cas particulier où $H = 1$, alors les surfaces de CMC sont caractérisées par

$$H = 1 \iff q = p, \quad \bar{\partial}J = 0.$$

En introduisant ces conditions dans nos équations de type Dirac (3.17), nous obtenons les équations de Gauss-Weierstrass

$$\partial\psi_1 = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_2, \quad \bar{\partial}\psi_2 = -(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\psi_1. \quad (3.20)$$

Ce système est équivalent aux équations de GMC (3.19) lorsque la condition suivante est respectée

$$\bar{\partial}J = 0, \quad \partial\bar{J} = 0.$$

La classe des surfaces CMC est déterminée par l'expression (3.16) où les fonctions complexes ψ_i doivent obéir au système GW (3.20). Il existe une correspondance un à un entre le modèle CP^1 ($N = 2$)

$$\partial\bar{\partial} - \frac{2\bar{\omega}}{1 + |\omega|^2} \partial\omega\bar{\partial}\omega = 0 \quad (3.21)$$

et le système GW (3.20).

1. Si ψ_1 et ψ_2 sont solutions du système GW (3.20), alors ω est défini par

$$\omega = \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}$$

et est une solution du modèle CP^1 .

2. À l'inverse, si ω est une solution de (3.21), alors les solutions ψ_1 et ψ_2 du système (3.20) prennent la forme

$$\psi_1 = \epsilon\omega \frac{\sqrt{\bar{\partial}\omega}}{1 + |\omega|^2}, \quad \psi_2 = \epsilon \frac{\sqrt{\partial\omega}}{1 + |\omega|^2}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

3.2.4 Métrique euclidienne et pseudo-euclidienne sur les surfaces

Nous introduisons deux possibilités pour une métrique induite sur les tangentes aux surfaces $F \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Nous prenons comme base pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ les éléments suivants

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est à noter que nous aurions pu prendre la base suivante

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un premier choix de métrique serait de décomposer la matrice dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et d'utiliser la métrique standard euclidienne, c'est-à-dire, étant donné $X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ avec

$$X = X^i e_i, \quad Y = Y^i e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

alors le produit interne et la norme dans l'espace euclidien sont définis par

$$\langle X, Y \rangle = X^i Y^i, \quad \|x\| = \sqrt{X^i X^i}.$$

Cela constitue un produit interne sur les vecteurs tangents pour les surfaces $F \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Avec ce produit interne, nos surfaces sont des variétés riemanniennes.

Il est commode d'introduire une métrique pseudo-euclidienne sur les surfaces. Nous pouvons également utiliser un produit symétrique bilinéaire défini par la forme de Killing, $B(X, Y)$. La forme de Killing sur $sl(2, \mathbb{R})$ est donnée, à un facteur près, par

$$B(X, Y) = \text{tr}(XY).$$

L'avantage principal de cette forme est qu'elle est invariante par rapport à la conjugaison par le groupe. Compte tenu de la forme des vecteurs tangents, les quantités géométriques associées aux surfaces seront indépendantes de la fonction d'onde $\phi \in SL(2, \mathbb{R})$

$$B(\phi^{-1}A\phi, \phi^{-1}B\phi) = \text{tr}(\phi^{-1}A\phi\phi^{-1}B\phi) = \text{tr}(AB).$$

En terme de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $X, Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, la forme de Killing $B(X, Y)$ peut être représentée comme

$$X = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \end{bmatrix}, \quad B(X^i, Y^i) = X^i B_{ij} Y^i, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La forme de Killing possède la signature $(2, 1)$ et donc induit la métrique pseudo-euclidienne sur les tangentes à la surface donnée par la fonction d'immersion $F \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Nos surfaces sont des variables pseudo-riemanniennes.

3.2.5 Classification des surfaces

La construction de surfaces pour les systèmes intégrables est assez directe. Par contre, il est non trivial d'identifier de telles surfaces possédant une caractérisation géométrique invariante. Une liste de telles surfaces a été présentée par Bobenko dans [18] :

1. Surface avec une courbure moyenne constante : $H = \text{constante}$,
2. Surface avec une courbure de Gauss positive et constante, $H > 0$,
3. Surface avec une courbure de Gauss négative et constante, $H < 0$,
4. Surface avec une courbure moyenne d'harmonique inverse, $(1/H)_{z\bar{z}}$, où z est une coordonnée conforme de la première forme fondamentale et \bar{z} est le complexe conjugué de z ,
5. Surface de Bianchi : $(1/\sqrt{-K})_{uv} = 0$, où u et v sont des coordonnées asymptotiques,
6. Surface de Bianchi à courbure positive : $(1/\sqrt{K})_{z\bar{z}}$, où z est une coordonnée conforme de la deuxième forme fondamentale,
7. Surface de Bonnet : membres d'une famille non-triviale de surfaces isométriques avec les mêmes courbures principales,

8. Surface minimale : $H = 0$.

Il est bien connu que les surfaces minimales sont associées à l'équation de Liouville

$$\theta_{uu} + \theta_{vv} - e^{-2\theta} = 0.$$

Les surfaces minimales et l'équation de Liouville ont été étudiées dans la littérature et ne seront pas considérées ici. Les surfaces de type 1 et 2 de la liste précédente sont associées à l'équation de Sinh-Gordon, tandis que les surfaces de type 3 sont associées à l'équation de Sine-Gordon. Les surfaces de types 4 à 6 sont associées à certains systèmes d'EDP intégrables non-linéaires. Les surfaces de Bonnet (7) sont, quant à elles, associées à certaines EDO non-linéaires du second ordre.

Comme application du théorème 3.1, nous pouvons obtenir certaines déformations des surfaces intégrables 1 à 7. Chaque surface déformée a les propriétés suivantes :

- Elle est associée au même système d'équations non-linéaires et intégrables que la surface intégrable de base correspondante.
- Elle est parallèle à la surface intégrable de base correspondante.
- Elle peut être décrite sous une forme invariante.

En particulier, si \tilde{K} et \tilde{H} dénotent la courbure de Gauss et moyenne de la surface déformée, alors la déformation des surfaces de types 1 à 7 considérée ici a les propriétés suivantes :

- Pour les surfaces de types 1 et 2, leurs déformations sont des surfaces de Weingarten linéaires

$$c_1 \tilde{H} + c_2 \tilde{K} + 1 = 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

telles que $c_2 < c_1^2$.

- La déformation de surfaces avec une courbure de Gauss négative et constante (3) forme des surfaces de Weingarten linéaires de la même forme que (3.22), mais telles que $c_2 > c_1^2$.
- La déformation des surfaces de types 4 satisfait la condition d'invariance

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left(\frac{1 + \mu \tilde{H} + \mu^2 \tilde{K}}{\tilde{H} + \mu \tilde{K}} \right) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- La déformation des surfaces de type Bianchi est caractérisée par la condition d'invariance

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \sqrt{-\left(\frac{1}{\tilde{K}} + \mu \frac{\tilde{H}}{\tilde{K}} + \mu^2\right)} = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- La déformation d'une surface de Bianchi avec une courbure positive satisfait la condition d'invariance

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{K}} + \mu \frac{\tilde{H}}{\tilde{K}} + \mu^2} = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- La courbure principale de la surface déformée dans la famille de Bonnet coïncide, mais les surfaces ne sont pas isométriques.

3.3 Équations différentielles ordinaires pour les équations elliptiques

Considérons une équation autonome du second ordre donnée par

$$u_{xx} = \frac{1}{2}f'(u), \quad \text{où} \quad f'(u) = \frac{\partial}{\partial u}f(u) \quad (3.23)$$

et où $f'(u)$ est arbitraire. Il est évident que l'équation (3.23) admet une intégrale première

$$(u_x)^2 = f(u), \quad u_x = \epsilon \sqrt{f(u)}, \quad \epsilon^2 = 1$$

et que les solutions de (3.23) vérifient

$$\int \frac{du}{\epsilon \sqrt{f(u)}} = x + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$u_x^2(x_0) = f(u(x_0))$$

et que

$$u^2(x_0) = 0, \text{ alors } f(u(x_0)) = 0.$$

La constante d'intégration peut donc être absorbée.

Considérons un cas particulier. Soit,

$$\frac{1}{\sqrt{f(u)}} = R(u, \sqrt{P(u)}),$$

où R est une fonction rationnelle de ses arguments et $P(u)$ est un polynôme d'ordre 3 ou 4. Alors la fonction u vérifiant l'équation (3.23) est l'inverse d'une intégrale elliptique [19]. En particulier, c'est le cas lorsque $f(u)$ est un polynôme d'ordre 3 ou 4.

3.3.1 Paire de Lax

L'EDO (3.23) admet la paire de Lax

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'(u)}{u + \lambda} - \frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} u_x & -\frac{f(u) - g(\lambda)}{u + \lambda} \\ u + \lambda & -u_x \end{bmatrix}.$$

Notons que L et M prennent leurs valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et que

$$\det(M) = -g(\lambda)$$

et que le choix

$$g(\lambda) = f(-\lambda)$$

nous donne que les éléments de L et de M deviennent des polynômes en u lorsque $f(u)$ est un polynôme en u .

Nous pouvons donc prendre

$$M = \begin{bmatrix} u_x & m_{12} \\ u + \lambda & -u_x \end{bmatrix}.$$

Trouvons m_{12} et L

$$\det(M) = -(u_x)^2 - (u + \lambda)m_{12} = -g(\lambda),$$

$$-f(u) - (u + \lambda)m_{12} = -g(\lambda),$$

$$m_{12} = -\frac{f(u) - g(\lambda)}{u + \lambda}.$$

Puisqu'on ne veut pas de pôle, on veut que m_{12} soit polynomiale en u

$$(u + \lambda)m_{12}|_{u=-\lambda} = 0,$$

$$g(\lambda) = f(-\lambda),$$

donc

$$D_x M + M L - L M = 0,$$

$$D_x M = \begin{bmatrix} u_{xx} & -u_x \frac{f'(u) - m_{12}}{u + \lambda} \\ u_x & -u_{xx} \end{bmatrix}.$$

Soit la base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

telle que nous décomposons L dans cette base

$$L = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3 \quad (3.24)$$

et donc, nous vérifions que M et L vérifient la relation (3.2)

$$[M, e_1] = \begin{bmatrix} m_{12} & 0 \\ -2u_x & -m_{12} \end{bmatrix}, \quad [M, e_2] = \begin{bmatrix} -(u + \lambda) & 2u_x \\ 0 & u + \lambda \end{bmatrix},$$

$$[M, e_3] = 2 \begin{bmatrix} 0 & -m_{12} \\ u + \lambda & 0 \end{bmatrix},$$

$$0 = D_x M + [M, L],$$

$$= \begin{bmatrix} u_{xx} + l_1 m_{12} - l_2(4 + \lambda) & -u_x \frac{f'(u) - m_{12}}{u + \lambda} + 2l_2 u_x - 2l_3 m_{12} \\ u_x - 2l_1 u_x + 2l_3(u + \lambda) & -u_{xx} - l_1 m_{12} + l_2(u + \lambda), \end{bmatrix}$$

$$0 = u_{xx} + l_1 m_{12} - l_2(u + \lambda),$$

$$0 = u_x - 2l_1 u_x + 2l_3(u + \lambda),$$

$$0 = -u_x \frac{m_{12} + f'(u)}{u + \lambda} + 2l_2 u_x - 2l_3 m_{12}.$$

Nous calculons les coefficients de l'équation (3.24)

$$l_2 = \frac{u_{xx} + l_1 m_{12}}{u + \lambda},$$

$$l_3 = u_x \frac{2l_1 - 1}{2(u + \lambda)}.$$

Puisque nous avons un degré de liberté pour les constantes l_i d'un point de vue calculatoire, nous choisissons $l_1 = \frac{1}{2}$ et nous aurons

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'(u)}{u + \lambda} - \frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons vérifier la compatibilité de la paire de Lax

$$\begin{aligned} D_x \phi &= L \phi, \\ D_y \phi &= M \phi, \end{aligned} \tag{3.25}$$

qui nous redonne nos équations de départ

$$D_x M + [M, L] = 0 \iff (u_x)^2 = f(u) \text{ et } u_{xx} = \frac{1}{2} f'(u).$$

3.3.2 Fonction d'onde

L'objectif de cette sous-section est de solutionner le PLS, c'est-à-dire de trouver une fonction d'onde ϕ qui va satisfaire le PLS. Les solutions des fonctions d'onde vérifiant le PLS sont notées par

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

où son déterminant est de 1 et avec les composantes [52]

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= c_1 \phi_{1+} + c_2 \phi_{1-}, & \phi_{12} &= c_3 \phi_{1+} + c_4 \phi_{1-}, & c_i &\in \mathbb{R}, \\ \phi_{21} &= c_1 \phi_{2+} + c_2 \phi_{2-}, & \phi_{22} &= c_3 \phi_{2+} + c_4 \phi_{2-}, & i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

et où

$$\phi_{1\pm} = \frac{\pm \sqrt{g(\lambda)} + u_x}{\sqrt{u + \lambda}} \psi_{\pm},$$

$$\phi_{2\pm} = \sqrt{u + \lambda} \psi_{\pm},$$

$$\psi_{\pm} = \exp \left[\pm \sqrt{g(\lambda)} \left(y + \int \frac{du}{2\epsilon(u + \lambda)\sqrt{f(u)}} \right) \right].$$

Le choix de ϵ vient de $u_x = \epsilon\sqrt{f(u)}$. En vue de la demande que $\phi \in SL(2\mathbb{R})$, c'est-à-dire que le déterminant doit être de 1, nous choisissons

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \text{ et } c_3 = -c_4 = \frac{-1}{2\sqrt{g(\lambda)}}.$$

3.3.3 Symétries des équations différentielles ordinaires associées aux intégrales elliptiques

Considérons un champ de vecteurs généralisés sous sa forme évolutive

$$\vec{v}_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u}$$

qui est une symétrie généralisée de l'EDO (3.23), c'est-à-dire

$$\text{pr}(\vec{v}_Q) \left(u_{xx} - \frac{1}{2}f'(u) \right) = 0, \quad \text{lorsque} \quad u_{xx} - \frac{1}{2}f'(u) = 0$$

est vérifié. Nous pouvons trouver l'équation déterminante de la façon suivante. Comme

$$\text{pr}(\vec{v}_Q) = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} + D_J Q \frac{\partial}{\partial u_J} = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} + D_x Q \frac{\partial}{\partial u_x} + (D_x)^2 Q \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

les équations déterminantes pour Q sont

$$(D_x)^2 Q - \frac{1}{2}f''(u)Q = 0, \quad \text{lorsque} \quad u_{xx} - \frac{1}{2}f'(u) = 0. \quad (3.26)$$

Puisque nous avons défini la dérivée totale de la façon suivante

$$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots,$$

l'opérateur $(D_x)^2$ sera

$$\begin{aligned} (D_x)^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} + 2u_x \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + 2u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + 2u_x u_{xx} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u_x} + (u_{xx})^2 \frac{\partial^2}{\partial u_x^2} + \dots \end{aligned}$$

Les caractéristiques Q_i sont des solutions de l'équation déterminante (3.26)

1. $Q_1 \equiv u_x$,
2. $Q_2 \equiv u_x \int (f(u))^{-3/2} du$,
3. $Q_3 \equiv xu_x + \gamma u$, pour le cas particulier où $f(u) = c_1 + c_2 u^l$, $\gamma, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1. Cas : $Q_1 = u_x$.

On peut observé directement que l'EDO (3.23) est invariante sous translation en x . Donc, le champ de vecteurs

$$\vec{v}_{Q_1} = u_x \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x}$$

est une symétrie de l'EDO (3.23).

Lemme 3.1. *Pour toute fonction $G(\lambda, y, [u])$ qui ne dépend pas explicitement de x , la prolongation du champ \vec{v}_{u_x} agit comme une dérivée totale*

$$\text{pr}(\vec{v}_{u_x})(G(y, \lambda, [u])) = D_x(G(y, \lambda, [u])) \iff \frac{\partial}{\partial x} G(y, \lambda, [u]) = 0.$$

Donc, nous avons

$$\text{pr}(\vec{v}_{u_x}) \Delta = D_x \left(u_{xx} - \frac{1}{2} f'(u) \right) = 0 \quad \text{lorsque} \quad u_{xx} - \frac{1}{2} f'(u) = 0.$$

Par analogie, la fonction d'onde ϕ et les matrices potentielles L et M ne dépendent pas explicitement de x , donc

$$\text{pr}(\vec{v}_{Q_1})(D_x \phi - L\phi) = D_x(D_x \phi - L\phi) = 0, \quad \text{lorsque} \quad D_x \phi - L\phi = 0,$$

$$\text{pr}(\vec{v}_{Q_1})(D_y \phi - M\phi) = D_x(D_y \phi - M\phi) = 0, \quad \text{lorsque} \quad D_y \phi - M\phi = 0.$$

Pour une fonction arbitraire $f(u)$, le champ \vec{v}_{u_x} est une symétrie commune de l'EDO (3.23) et du PLS (3.3).

2. Cas : $Q_2 = u_x \int (f(u))^{-3/2} du$.

Nous pouvons vérifier que $Q_2 = u_x \int (f(u))^{-3/2} du$ résout l'équation déterminante (3.26). Cependant, ce n'est pas une symétrie du PLS, car l'action de $\text{pr}(\vec{v}_{Q_2})$ sur le PLS

$$\begin{aligned} \text{pr}(\vec{v}_{Q_2})(D_y \phi - M\phi) &= \frac{u_x}{\sqrt{u + \lambda} \sqrt{f(u)}} \begin{bmatrix} -(\psi_+ + \psi_-) & (g(\lambda))^{-\frac{1}{2}}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & (\psi_+ + \psi_-) \end{bmatrix}, \\ \text{pr}(\vec{v}_{Q_2})(D_x \phi - L\phi) &= \frac{u_x}{2(u + \lambda)^{3/2} \sqrt{f(u)}} \begin{bmatrix} -(\psi_+ + \psi_-) & (g(\lambda))^{-\frac{1}{2}}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & (\psi_+ + \psi_-) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ne disparaît pas pour toutes les solutions ϕ du PLS. Donc, bien qu'il existe une fonction d'immersion F^{Q_2} avec ses valeurs dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ avec les vecteurs tangents

$$D_x F^{Q_2} = \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_{Q_2})L) \phi, \quad D_y F^{Q_2} = \phi^{-1} (\text{pr}(\vec{v}_{Q_2})M) \phi,$$

la fonction intégrée F^{Q_2} n'est pas de la forme donnée dans (3.8),

$$F^{Q_2} \neq \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_{Q_2}) \phi.$$

3. Cas : $Q_3 = xu_x + \gamma u$.

Cette symétrie est valide seulement pour le cas particulier

$$f(u) = c_1 + c_2 u^l, \quad l = 2(1 + \frac{1}{\gamma}), \gamma, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de vérifier que Q_3 satisfait l'équation déterminante (3.26), mais son action sur le PLS nous donne

$$\begin{aligned} \text{pr}(\vec{v}_{Q_3})(D_y \phi - M\phi) &= \frac{c_1(1 + \gamma)}{\sqrt{u + \lambda}} \begin{bmatrix} -(\psi_+ + \psi_-) & (g(\lambda))^{-1/2}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & (\psi_+ + \psi_-) \end{bmatrix}, \\ \text{pr}(\vec{v}_{Q_3})(D_x \phi - L\phi) &= \frac{c_1(1 + \gamma)}{2(u + \lambda)^{\frac{-3}{2}}} \begin{bmatrix} -(\psi_+ + \psi_-) & (g(\lambda))^{-1/2}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & (\psi_+ + \psi_-) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, \vec{v}_{Q_3} est une symétrie du PLS seulement pour le cas $c_1 = 0$ ou $\gamma = -1$. Dans le cas précédent, l'équation différentielle se réduit au cas dégénéré $(u_x)^2 = c_2 u^l$ et dans le dernier cas, u satisfait une équation linéaire en x car $(u_x)^2 = c_1 + c_2 x$.

En résumé, pour une fonction arbitraire $f(u)$, il existe des surfaces F^{Q_1} , F^{Q_2} et F^{Q_3} avec les vecteurs tangents

$$D_x F^{Q_i} = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_{Q_i})(L)\phi, \quad D_y F^{Q_i} = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_{Q_i})(M)\phi.$$

Uniquement pour Q_1 , la fonction d'immersion de la surface est donnée par la formule

$$F^{Q_1} \equiv F^{u_x} = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_{u_x})\phi.$$

Dans le cas particulier où

$$f(u) = c_1 + c_2 u^l,$$

la surface F^{Q_3} est donnée par

$$F^{Q_1} = \phi^{-1} \text{pr}(\vec{v}_{Q_3})\phi,$$

mais uniquement dans le cas où $c_1 = 0$ ou $\gamma = -1$.

3.3.4 Première forme fondamentale des surfaces

Commençons par rappeler quelques équations. Les vecteurs tangents de la surface F sont donnés par

$$D_x F = \phi^{-1} A \phi, \quad D_y F = \phi^{-1} B \phi,$$

où les matrices A et B pour la formule d'immersion de Sym-Tafel sont données par

$$A^{ST} = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} L, \quad B^{ST} = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} M.$$

Dans le cas des fonctions elliptiques, les matrices potentielles prennent la forme,

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'(u)}{u+\lambda} - \left(\frac{f(u)-g(\lambda)}{(u+\lambda)^2} \right) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} u_x & -\frac{f(u)+g(\lambda)}{u+\lambda} \\ u+\lambda & -u_x \end{bmatrix},$$

où nous utilisons la forme de Killing pour définir le produit scalaire

$$(\phi^{-1}A\phi, \phi^{-1}B\phi) = \text{tr}(\phi^{-1}A\phi\phi^{-1}B\phi) = \text{tr}(AB).$$

Nous pouvons écrire la première forme fondamentale de la façon suivante

$$I = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{22}dy^2,$$

où

$$g_{11} = \text{tr}(A^{ST})^2, \quad g_{12} = \text{tr}(A^{ST}B^{ST}), \quad g_{22} = \text{tr}(B^{ST})^2.$$

À titre d'exemple, la première forme fondamentale de la surface F^{ST} pour une fonction arbitraire $f(u)$ avec la métrique pseudo-euclidienne est donnée par

$$I_B(F^{ST}) = \left(2 \frac{f-g}{(u+\lambda)^3} - \frac{f'-g'}{(u+\lambda)^2} \right) dxdy + 2 \left(\frac{g'}{u+\lambda} + \frac{f-g}{(u+\lambda)^2} \right) dy^2.$$

Comme nous pouvons voir, dans ce cas-ci, $g_{11} = 0$, c'est-à-dire que la trace de $(A^{ST})^2$ est nulle. Ceci implique qu'il s'agit d'un vecteur isotrope.

Voici un exemple de la procédure pour obtenir la première forme fondamentale. À partir de nos équations de départ ainsi que de sa paire de Lax appartenant à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{2}f'(u), & (u_x)^2 &= f(u), \\ U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'(u)}{u+\lambda} - \frac{f(u)-g(\lambda)}{(u+\lambda)^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \\ V &= \begin{bmatrix} u_x & -\frac{f(u)-g(\lambda)}{u+\lambda} \\ u+\lambda & -u_x \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

nous pouvons aisément trouver les matrices A^{ST} et B^{ST} à l'aide des équations ci-dessous

$$A^{ST} = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} U, \quad B^{ST} = a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} V,$$

où

$$A^{ST} = \frac{a(\lambda)}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f'(u) - g'(\lambda)}{(u + \lambda)^2} + 2\frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}),$$

$$B^{ST} = a(\lambda) \begin{bmatrix} 0 & \frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^2} + \frac{g'(\lambda)}{u + \lambda} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

De là, nous pouvons trouver la première forme fondamentale

$$I_B(F^{ST}) = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2,$$

où

$$g_{11} = \frac{1}{2} \text{tr} \left(A^{ST^2} \right), \quad g_{12} = \frac{1}{2} \text{tr} \left(A^{ST} B^{ST} \right), \quad g_{22} = \frac{1}{2} \text{tr} \left(B^{ST^2} \right).$$

Il est à noter ici que le facteur $\frac{1}{2}$ a été choisi en fonction de la base $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

$$g_{11} = 0,$$

$$g_{12} = \frac{a^2(\lambda)}{2} \left(2\frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^3} - \frac{f'(u) - g'(\lambda)}{(u + \lambda)^2} \right),$$

$$g_{22} = a^2(\lambda) \left(\frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^2} + \frac{g'(\lambda)}{u + \lambda} \right).$$

Nous obtenons donc le même résultat que précédemment.

$$I_B(F^{ST}) = a^2(\lambda) \left[\left(2\frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^3} - \frac{f'(u) - g'(\lambda)}{(u + \lambda)^2} \right) dxdy + \left(\frac{f(u) - g(\lambda)}{(u + \lambda)^2} + \frac{g'(\lambda)}{u + \lambda} \right) dy^2 \right].$$

Il est aussi intéressant de connaître la signature d'une base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Soit la base suivante

$$X = (X^1, X^2, X^3) \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow X = X^i e_i, \quad e_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}),$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

alors nous pouvons écrire un vecteur isotrope de la façon suivante

$$X = \begin{bmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow X = (0, \frac{m}{2}, -\frac{m}{2}).$$

Ceci nous fait une norme nulle, il s'agit donc d'un vecteur isotrope

$$||X||^2 = 0^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4} \equiv 0.$$

À partir des opérations suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_1) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_2 e_2) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1, \\ \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_2) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_2 e_3) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_3) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_3 e_3) &= \frac{1}{2}\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$

il est simple d'obtenir la signature

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}\text{tr}(XY) = X^i b_{ij} Y^j, \quad b_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est dans ce cas la signature (2,1). Nous pouvons aussi le faire dans une autre base, soit

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B(X, Y) = \frac{1}{2}\text{tr}(XY) = X^i b_{ij} Y^j$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_1) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_2 e_2) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_2) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_2 e_3) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \frac{1}{2}\text{tr}(e_1 e_3) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, & \frac{1}{2}\text{tr}(e_3 e_3) &= \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned}$$

avec la signature

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si nous prenons le cas $Q_1 \equiv u_x$ de la symétrie généralisée, nous obtenons la première forme fondamentale suivante

$$I_B(F^{u_x}) = \left(\frac{ff'}{u+\lambda} - \frac{2ff'}{(u+\lambda)^2} + \frac{2f(f-g)}{(u+\lambda)^3} \right) dx dy + \left(\frac{f'^2}{2} - \frac{2ff'}{u+\lambda} + \frac{2f(f-g)}{(u+\lambda)^2} \right) dy^2.$$

Encore une fois, l'élément g_{11} est nul, donc A est un vecteur isotrope, où

$$A = \text{pr}(\vec{v}_Q)L, \quad B = \text{pr}(\vec{v}_Q)M, \quad \vec{v}_{Q_1} = u_x \frac{\partial}{\partial u}.$$

Dans ce cas la prolongation est

$$\text{pr}(\vec{v}_{Q_1}) = u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots$$

étant donné que notre équation est tronquée à u_{xx} .

3.3.5 Deuxième forme fondamentale des surfaces

Nous pouvons obtenir la deuxième forme fondamentale avec le même principe, toutefois les équations pour obtenir les coefficients sont quelque peu différentes

$$II = edx^2 + 2f dx dy + g dy^2,$$

$$e = \frac{1}{2} \text{tr} (N D_x^2 F), \quad f = \frac{1}{2} \text{tr} (N D_x D_y F), \quad g = \frac{1}{2} \text{tr} (N D_y^2 F).$$

Ici N est le vecteur normal à la surface. Il est donné par

$$N = \phi^{-1} \frac{[A, B]}{||[A, B]||} \phi, \quad ||[A, B]|| = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr} ([A, B]^2)}.$$

Dans le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, le vecteur normal est

$$N^{ST} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \phi.$$

Nous avons donc les coefficients de la formule d'immersion de Sym-Tafel suivants

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{2} \text{tr} (N^{ST} D_x^2 F^{ST}), \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} (\phi N^{ST} \phi^{-1} ((A^{ST})_x + [A^{ST}, L])) = \left(\frac{g' - f'}{4(u + \lambda)^2} + \frac{f - g}{2(u + \lambda)^3} \right), \\
f &= \frac{1}{2} \text{tr} (N^{ST} D_x D_y F^{ST}), \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} (\phi N \phi^{-1} ((A)_y^{ST} + [A^{ST}, M])) = \left(\frac{g' - f'}{2(u + \lambda)} + \frac{f - g}{(u + \lambda)^2} \right), \\
g &= \frac{1}{2} \text{tr} (N^{ST} D_y^2 F^{ST}) = \frac{1}{2} \text{tr} (\phi N^{ST} \phi^{-1} ((B^{ST})_y + [B^{ST}, M])) = \left(\frac{2(f - g)}{u + \lambda} + g' \right).
\end{aligned}$$

Ceci fait en sorte que nous avons la deuxième forme fondamentale suivante

$$\begin{aligned}
II^{ST} &= \left(\frac{g' - f'}{4(u + \lambda)^2} + \frac{f - g}{2(u + \lambda)^3} \right) dx^2 + \left(\frac{g' - f'}{u + \lambda} + 2 \frac{f - g}{(u + \lambda)^2} \right) dx dy \\
&\quad + \left(\frac{2(f - g)}{u + \lambda} + g' \right) dy^2.
\end{aligned}$$

Maintenant que nous connaissons la première et la deuxième formes fondamentales, nous avons complètement caractérisé la surface solitonique à une translation et une rotation près. La connaissance de ces deux formes fondamentales permet aussi de connaître la courbure de Gauss et la courbure moyenne, puis de là nous pouvons obtenir les points umbiliques ainsi que la troisième forme fondamentale. Nous verrons ces quatre autres résultats dans la section suivante.

Pour le cas des symétries généralisées, commençons par définir les paramètres

$$\gamma := \frac{Q}{2} \left(\frac{f''}{u + \lambda} - \frac{2f'}{(u + \lambda)^2} + \frac{2(f - g)}{(u + \lambda)^3} \right), \quad \delta := \frac{Q(f - g)}{(u + \lambda)^2} - \frac{Qf'}{u + \lambda}.$$

En introduisant ces paramètres, nous avons une deuxième forme fondamentale avec les termes suivants

$$\begin{aligned}
\Pi &= \left[\frac{1}{2} \gamma - D_x \gamma \frac{D_x Q}{Q} \right] dx^2 + 2 \left[\gamma(u + \lambda) - \frac{D_y Q D_x Q}{Q^2} \gamma \right] dx dy \\
&\quad + \left[D_x D_y Q + \delta(u + \lambda) - Q \left(\frac{g - f}{u - \lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{D_x Q}{Q} \left(\frac{D_y Q}{Q} \delta - 2D_x Q(u + \lambda) + 2Q u_x \right) \right] dy^2.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $Q = u_x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Pi = & \left[\frac{1}{2} \gamma - D_x \gamma \frac{f'}{2u_x} \right] dx^2 + 2 [\gamma(u + \lambda)] dx dy \\ & + \left[\delta(u + \lambda) - u_x \left(\frac{g - f}{u - \lambda} \right) - \frac{f'}{2u_x} (-f'(u + \lambda) + 2f) \right] dy^2. \end{aligned}$$

3.3.6 Courbure de Gauss, courbure moyenne et points umbiliques

La courbure de Gauss K est donnée par l'équation

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

où les coefficients e, f, g, E, F, G sont ici les coefficients des première et deuxième formes fondamentales. Pour ce qui est de la courbure moyenne, elle est donnée par

$$H = \frac{Eg + eG - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Pour le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous avons

$$K = (u + \lambda)^2 - \frac{\beta}{2\alpha}(u + \lambda) - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{f - g}{u + \lambda} \right), \quad H = 2(u + \lambda) - \frac{\beta}{\alpha},$$

avec

$$\alpha := \frac{1}{2} \left(2 \frac{f - g}{(u + \lambda)^3} - \frac{f' - g'}{(u + \lambda)^2} \right), \quad \beta := \frac{g'}{u + \lambda} + \frac{f - g}{(u + \lambda)^2}.$$

Pour le cas des symétries généralisées où $Q = u_x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} K = & \frac{4(u + \lambda)^2}{f} - \frac{4}{f\gamma^2} \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{(D_x \gamma)f'}{2u_x} \right) \left(\delta(u + \lambda) - Q \frac{g - f}{u + \lambda} - \frac{f'}{2u_x} [2f - f'(u + \lambda)] \right), \\ H = & 2 \frac{u_x(u + \lambda)}{f} + \frac{1}{f\gamma^2} \left(\frac{(D_x \gamma)f'}{u_x} - \gamma \right) \left(\frac{f'^2}{4} + f \left[\frac{f - g}{(u + \lambda)^2} - \frac{f'}{u + \lambda} \right] \right). \end{aligned}$$

À partir des courbures K et H , nous pouvons trouver les points umbiliques. Ils sont donnés par l'équation

$$H^2 - K = 0.$$

Par exemple, pour le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous avons des points umbiliques lorsque l'équation

$$0 = 3(u + \lambda)^3 - \frac{7}{8}(u + \lambda)\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{f - g}{u + \lambda} \right)$$

est satisfaite.

3.4 Fonctions elliptiques de Jacobi

Considérons l'équation différentielle pour les fonctions elliptiques de Jacobi

$$(u_x)^2 = \underbrace{(1 - u^2)(k_1 + k_2 u^2)}_{f(u)} \iff u_{xx} = -2k_2 u^3 + (k_2 - k_1)u \quad (3.27)$$

pour le choix des constantes

TABLEAU 3.1 – Certaines fonctions elliptiques de Jacobi

k_1	k_2	Solution de (3.27)
1	$-k^2$	$\text{sn}(x, k)$
$(k')^2$	k^2	$\text{cn}(x, k)$
$-k^2$	1	$\text{dn}(x, k)$

où k est le module, avec les contraintes $(k')^2 + k^2 = 1$ et $0 \leq k, k' \leq 1$ (voir Annexe A.5 pour les propriétés.)

Les matrices L et M sont donc polynomiales d'ordre 3

$$M = \begin{bmatrix} u_x & (u - \lambda)(k_1 + k_2(u^2 + \lambda^2 - 1)) \\ u + \lambda & -u_x \end{bmatrix},$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3k_2 u + 2\lambda k_2 u + k_1 - k_2 - k_2 \lambda^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où les deux matrices font partie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

En substituant $f(u)$ et $g(\lambda)$, où $f(-\lambda) = g(\lambda)$

$$m_{12} = -\frac{f(u) - g(\lambda)}{u + \lambda} = \frac{(1 - u^2)(k_1 - k_2 u^2) - (1 - \lambda^2)(k_1 + k_2 \lambda^2)}{u + \lambda},$$

en simplifiant, nous avons

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{k_1 - u^2 k_1 - k_2 u^4 + k_2 u^2 - k_1 + \lambda^2 k_1 + k_2 \lambda^4 - k_2 \lambda^2}{u + \lambda}, \\ m_{12} &= \frac{(\lambda^2 - u^2)k_1 - k_2(u^4 - \lambda^4) + k_2(u^2 - \lambda^2)}{u + \lambda}, \\ m_{12} &= \frac{\lambda^2 - u^2}{\lambda + u} (k_1 - k_2 + k_2(u^2 + \lambda^2)), \end{aligned}$$

et finalement, nous avons

$$m_{12} = (\lambda - u) (k_1 - k_2 + k_2(u^2 + \lambda^2)).$$

La fonction d'onde devient

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{g(\lambda)} - u_x)\psi_+ - (\sqrt{g(\lambda)} + u_x)\psi_-}{2\sqrt{u+\lambda}} & \frac{(\sqrt{g(\lambda)} + u_x)\psi_- - (\sqrt{g(\lambda)} - u_x)\psi_+}{2\sqrt{g(\lambda)}\sqrt{u+\lambda}} \\ \frac{\sqrt{u+\lambda}(\psi_+ + \psi_-)}{2} & \frac{\sqrt{u+\lambda}(\psi_- - \psi_+)}{2\sqrt{g(\lambda)}} \end{bmatrix},$$

où

$$\psi_{\pm} = \exp \left[\sqrt{g(\lambda)} \left(y + \int \frac{dx}{2(u + \lambda)} \right) \right].$$

Afin d'utiliser l'analyse des symétries, nous pouvons employer l'équation différentielle pour u_x , afin d'évaluer l'intégrale en terme de $\Pi(u, a, b)$, une intégrale elliptique du troisième type. Nous avons que

$$du = u_x dx = \pm \sqrt{(1 - u^2)(k_1 + k_2 u^2)} dx$$

et donc¹

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2(u+\lambda)} &= \pm \int \frac{du}{(u+\lambda)\sqrt{(1-u^2)(k_1+k_2u^2)}}, \\ &= c_0 + \frac{1}{\lambda\sqrt{k_1}}\Pi\left(u, \frac{1}{\lambda^2}, \sqrt{\frac{-k_2}{k_1}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{g(\lambda)}}\tanh^{-1}\left(\frac{(k_2-k_1-2k_2\lambda^2)u^2 + (k_2-k_1)\lambda^2 + 2k_1}{2\sqrt{g(\lambda)}\sqrt{(1-u^2)(k_1+k_2u^2)}}\right). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous présentons certains graphes de surfaces induites. Les surfaces dans les figures 4.1 et 4.3 ont des constantes choisies de telle façon que $g(\lambda) > 0$ et donc les surfaces se comportent de façon exponentielle. Les surfaces dans les figures 4.2 et 4.4 sont telles que $g(\lambda) < 0$ et donc les surfaces ont un comportement trigonométrique.

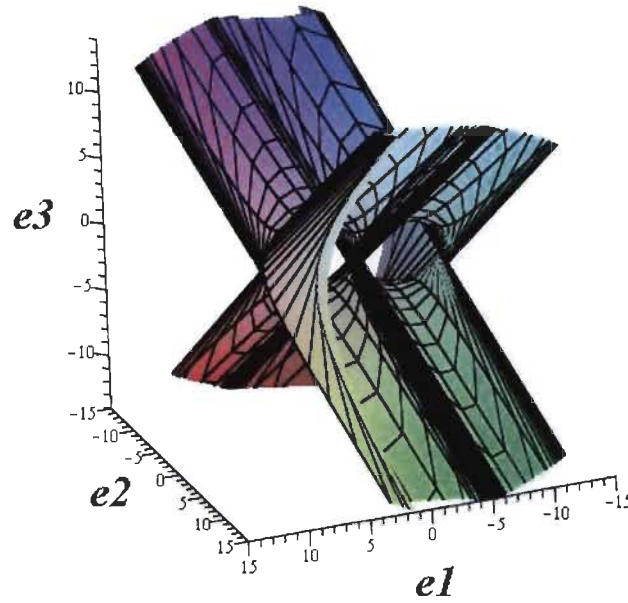


FIGURE 3.1 – Surface de la symétrie généralisée pour la fonction $cn(x, k)$ avec $g > 0$
 $k = 0.2$ et $\lambda = 1.2$.

1. Pour l'intégrale, voir l'intégrale elliptique de 3^e ordre dans [46].

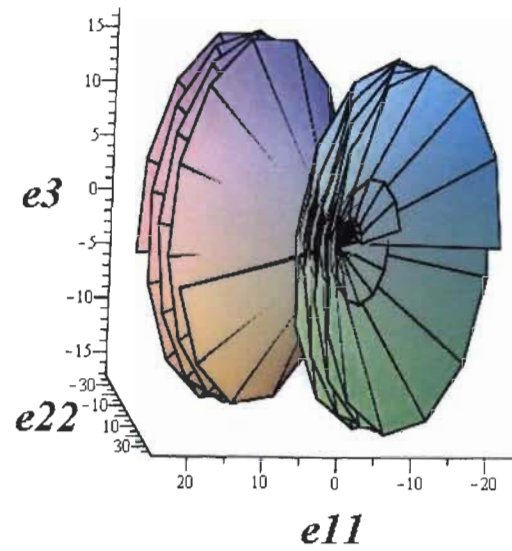


FIGURE 3.2 – Surface d’immersion de Sym-Tafel pour la fonction $cn(x, k)$ avec $g < 0$
 $k = 0.8$ et $\lambda = 0.5$.

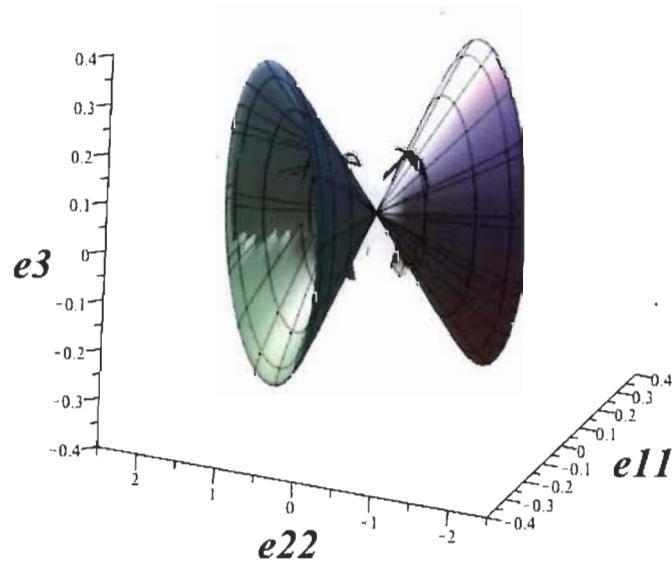


FIGURE 3.3 – Surface de la symétrie généralisée pour la fonction $dn(x, k)$ avec $g > 0$
 $k = 0.87$ et $\lambda = 0.9$.

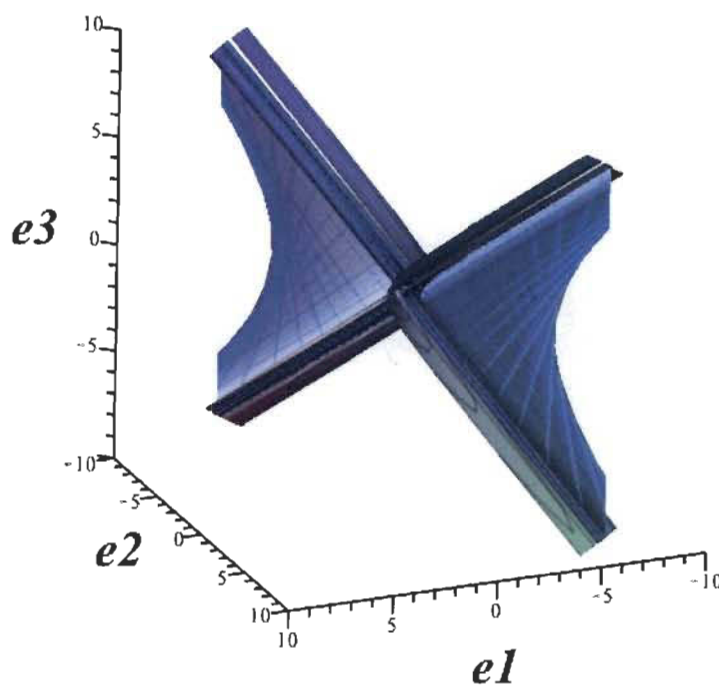


FIGURE 3.4 – Surface d'immersion de Sym-Tafel pour la fonction $dn(x, k)$ avec $g < 0$ $k = 0.5$ et $\lambda = 1.2$.

3.5 Fonction elliptique de \mathcal{P} -Weierstrass

Considérons l'équation différentielle pour la fonction elliptique \mathcal{P} -Weierstrass

$$(u_x)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3 \iff u_{xx} - 6u^2 + \frac{g_2}{2} = 0,$$

où g_2 et g_3 sont appelés les invariants de la fonction \mathcal{P} -Weierstrass. Si nous choisissons $g(\lambda) = f(-\lambda)$,

$$M = \begin{bmatrix} u & -4u^2 + 4\lambda u - 4\lambda^2 + g_2 \\ u + \lambda & -u_x \end{bmatrix},$$

$$L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 4u - 2\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

font partie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. La fonction d'onde est

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{(\sqrt{g} - u_x)\psi_+ - (\sqrt{g} + u_x)\psi_-}{2\sqrt{u + \lambda}} & \frac{-(\sqrt{g} - u_x)\psi_+ + (\sqrt{g} + u_x)\psi_-}{2\sqrt{g}\sqrt{u + \lambda}} \\ \frac{\sqrt{u + \lambda}(\psi_+ + \psi_-)}{2} & \frac{\sqrt{u + \lambda}(\psi_- - \psi_+)}{2\sqrt{g}} \end{bmatrix},$$

où

$$\psi_{\pm} = \exp \left[\sqrt{g} \left(y + \int \frac{dx}{2(u + \lambda)} \right) \right].$$

Afin d'utiliser l'analyse de symétries, nous employons l'équation différentielle pour u_x comme

$$du = u_x dx = \pm \sqrt{4u^3 - g_2u - g_3} dx$$

afin d'évaluer l'intégrale elliptique du troisième type

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2(u + \lambda)} &= \pm \int \frac{du}{2(u + \lambda)\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}, \\ &= \frac{1}{(\lambda - a_1)(2a_1 + a_2)} \Pi \left(\sqrt{\frac{u + a_1}{a_1 - a_2}}, \frac{a_1 - a_2}{\lambda - a_1}, \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{2a_1 + a_2}} \right) + c_0, \end{aligned}$$

où pour simplifier, nous utilisons les constantes a_1, a_2 pour représenter les racines du polynôme $f(u)$.

Puisque le PLS a été résolu, nous pouvons construire les surfaces solitoniques associées à cette équation. Nous donnons ici deux surfaces à titre d'exemple. Nous avons ici construit la surface associée à la symétrie conforme en λ avec les paramètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$.

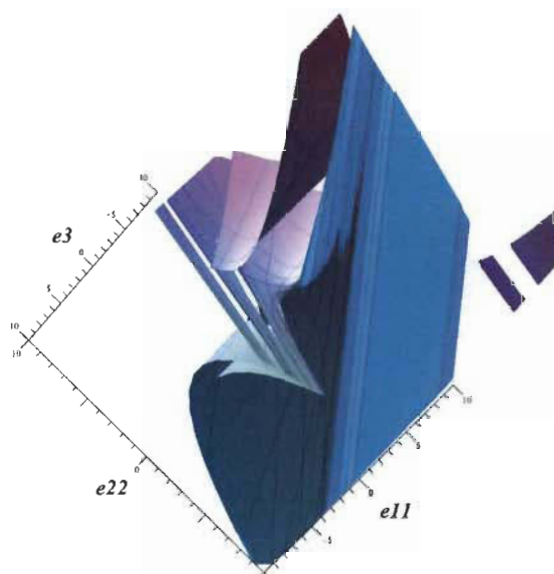


FIGURE 3.5 – La surface pour la formule d’immersion de Sym-Tafel avec les paramètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$

Nous présentons aussi la surface associée à la symétrie de translation en x pour les paramètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$

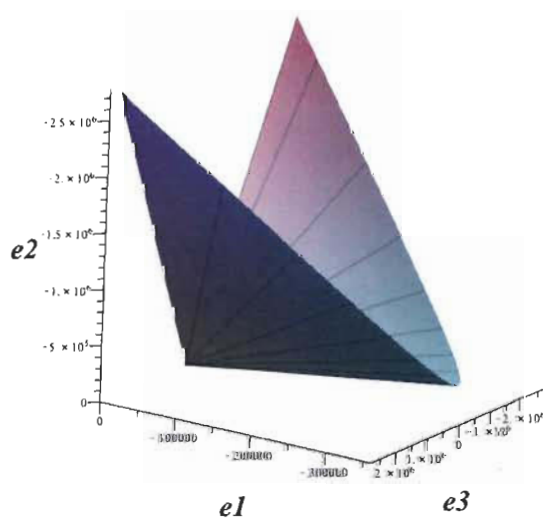


FIGURE 3.6 – La surface pour une translation en x avec les paramètres $\lambda = 0.5$ et $g_1 = g_2 = 0.8$

3.6 Équations différentielles ordinaires de Painlevé

3.6.1 Caractérisation de l'équation P1

Considérons la forme de courbure nulle pour une EDO en $x(t)$. Les matrices U^α sont définies sur l'espace de Jet pour t , x et ses dérivées. Le paramètre spectral est considéré comme une variable indépendante. Nous utiliserons ici le troisième type de paire de Lax, c'est-à-dire où la variable auxiliaire est le paramètre spectral.

Soit l'équation de Painlevé P1

$$\Omega[x] = x_{tt} - 6x^2 - t = 0.$$

Son PLS est donné en terme des matrices potentielles $U^1([x], \lambda)$ et $U^2([x], \lambda)$ prenant leurs valeurs dans l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ [26,61,64]

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda + 2x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} -x_t & 2\lambda^2 + 2\lambda x + t + 2x^2 \\ 2(\lambda - x) & x_t \end{pmatrix},$$

qui satisfont la représentation de courbure nulle du troisième type, soit avec les variables indépendantes λ et t ,

$$\Omega[x] = D_\lambda U^1 - D_t U^2 + [U^1, U^2] = (x_{tt} - 6x^2 - t) e_1,$$

où la base est définie ainsi

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous cherchons la surface associée à la translation du paramètre,

$$F^{ST} = \phi^{-1} D_\lambda \phi.$$

Dans ce cas, nous avons les matrices linéairements indépendantes données par

$$A^{ST} = D_\lambda U^1 = e_1, \quad B^{ST} = D_\lambda U^2 = 2e_2 + (4\lambda + 2x)e_1,$$

qui proviennent des équations

$$D_t F^{ST} = \phi^{-1} A^{ST} \phi, \quad D_\lambda F^{ST} = \phi^{-1} B^{ST} \phi,$$

qui sont aussi linéairement indépendantes. De là, nous avons la première forme fondamentale

$$\mathbb{I}^{ST} = 2dt d\lambda + 4(x + 2\lambda)d\lambda^2.$$

De plus, le vecteur normal est donné par l'équation

$$N = \phi^{-1} e_1 \phi.$$

Il est à noter que l'image de la surface est contenue dans un plan orthogonal au vecteur normal. Pour ce qui est de la deuxième forme fondamentale, nous avons

$$\mathbb{II}^{ST} = -dt^2 + 4(x - \lambda)dt d\lambda + 2(4x^2 + 4\lambda x + t - \lambda^2)d\lambda^2,$$

et de là, les courbures de Gauss et moyenne sont données respectivement par

$$K^{ST} = 2x_{tt}, \quad H^{ST} = 2(2x + \lambda).$$

Notons que la courbure moyenne ne dépend pas du paramètre spectral. Le signe de la deuxième dérivée de $P1$ détermine où les points sur la surface sont hyperboliques, paraboliques ou elliptiques, c'est-à-dire que si la deuxième dérivée est plus petite que 0, il s'agit du type hyperbolique, si elle est inférieure à 0, il s'agit du type elliptique et dans le cas $K^{ST} = 0$, alors c'est parabolique.

Les points umbiliques sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} H^2 - K &= 4(2x + \lambda)^2 - 2(6x^2 + t) = 0, \\ &= 4(2x + \lambda)^2 - 2x_{tt} = 0. \end{aligned}$$

La courbe $\lambda = -2x \pm \sqrt{\frac{x_{tt}}{2}}$ ne possède pas de point umbilique quand $K^{ST} < 0$. Si par contre K^{ST} est positif, le long de cette courbe la solution sous forme de série de Laurent diverge, il y a une perte de sens.

D'autre part, on peut réécrire l'équation P1 comme un système Hamiltonien.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{q}_2 &= 6q_1^2 + q_2, & \dot{q}_3 &= 1, & \dot{p}_2 &= q_1, \\ H &= \frac{1}{2}p_1^2 - 2q_1^3 - q_1q_2 + p_2. \end{aligned}$$

La série de Laurent de la solution a la forme

$$\begin{aligned} q_1 &\sim t^{-2} \left[1 + 0t + 0t^2 + 0t^3 - \frac{r_1 t^4}{10} - \frac{t^5}{6} + \frac{r_3 t^6}{4} + \dots \right], \\ q_2 &\sim t^{-4} \left[0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \frac{r_1 t^5}{10} + t^5 + 0t^6 + \dots \right], \\ p_1 &\sim t^{-3} \left[-2 + 0t + 0t^2 + 0t^3 - \frac{r_1 t^4}{5} - \frac{t^5}{2} + r_3 t^6 + \dots \right], \\ p_2 &\sim t^{-1} \left[-1 + r_2 t + 0t^2 + 0t^3 - \frac{r_1 t^4}{30} - \frac{t^5}{24} + \frac{r_3 t^6}{20} + \dots \right]. \end{aligned}$$

3.6.2 Propriété de l'équation P6

Soit l'équation de Painlevé P6

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) y'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) y' \\ &\quad + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)} \left[\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right], \end{aligned}$$

où $y = y(t)$. La solution de Picard de l'équation P6 qui est un cas très spécial, quand $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}$, qui est écrite en termes de la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass

$$y(t) = 4\mathcal{P}(c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t)|g_2, g_3) + \frac{t+1}{3}, \quad (3.28)$$

où

$$g_2 = \frac{1}{12}(t^2 - t + 1), \quad g_3 = \frac{1}{432}(t+1)(2t-1)(t-2),$$

et où ω_1 et ω_2 sont une paire de la période fondamentale

$$c_1 = \frac{k}{n}, \quad c_2 = \frac{l}{n} \in \mathbb{Q}^+, \text{ les nombres rationnels positifs.}$$

R. Fuchs a démontré que la solution de Picard (3.28) est développable à $t = 0$ comme

$$y(t) = -4 \frac{e^{2\pi i k/n}}{2^{8l/n}} t^{\frac{2l}{n}} + a_1 t^{\frac{2l+1}{n}} + \dots \quad \text{si } \frac{l}{n} < \frac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\frac{l}{n} > \frac{1}{2}$, nous avons un développement similaire. Nous pouvons prendre la limite quand $t \rightarrow 0$ dans le PLS

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A(x, y(t), t) \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = B(x, y(t), t) \psi, \quad (3.29)$$

où x est le paramètre spectral. Alors, l'équation (3.29) est réduite aux équations hypergéométriques de Gauss. Puisque l'équation (3.28) a un développement similaire à $t = 1$, nous pouvons prendre une autre limite à $t \rightarrow 1$ dans l'équation (3.29).

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \iff \text{équations hypergéométriques.}$$

Les équations hypergéométriques sont très bien connues dans la littérature (voir [6]).

3.7 Problème de Sturm-Liouville

Soit l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = \alpha(x, \lambda) \omega, \quad \text{où } x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad (3.30)$$

avec son PLS

$$D_x \phi = L \phi, \quad D_y \phi = M \phi,$$

telle que les matrices potentielles L et M ne dépendent pas de y , c'est-à-dire $D_y L = D_y M = 0$, et $\phi = \phi(\lambda, y, [\omega]) \in G$. Nous cherchons à construire le PLS en nous basant sur [48]. Nous pouvons prendre

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

comme matrice potentielle puisque

$$\partial_x \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_x \end{pmatrix}.$$

Il est intéressant de noter que cette matrice L possède une trace nulle. À partir d'ici, pour trouver ϕ , nous avons

$$D_x \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{21} & \phi_{22} \\ \alpha\phi_{11} & \alpha\phi_{12} \end{pmatrix}.$$

En extrayant les quatre équations scalaires de l'équation matricielle ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi_{11,x} &= \phi_{21}, & \phi_{12,x} &= \phi_{22}, \\ \phi_{21,x} &= \phi_{11}, & \phi_{22,x} &= \phi_{21}. \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement substituer pour obtenir deux équations d'ordre 2, soit

$$\phi_{11,xx} = \alpha\phi_{11}, \quad \phi_{12,xx} = \alpha\phi_{12}.$$

Ces deux équations sont quasiment identiques à l'équation (3.30). Il est à noter que l'équation de Sturm-Liouville est d'ordre 2, et donc elle a deux solutions linéairement indépendantes. Nous allons nommer $\phi_{11} := \omega$, et donc

$$\phi = \begin{pmatrix} \omega & \phi_{12} \\ \omega_x & \phi_{12,x} \end{pmatrix}.$$

Nous voulons que ϕ appartienne au groupe $SL(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que le déterminant de ϕ soit de 1. Nous avons donc l'équation

$$\omega\phi_{12,x} - \phi_{12}\omega_x = 1. \quad (3.31)$$

Nous pouvons facilement voir que la solution

$$\phi_{12} = \omega \int_0^x \frac{1}{\omega^2} ds$$

satisfait l'équation (3.31). Nous connaissons maintenant ϕ

$$\phi = \begin{pmatrix} \omega & \omega \int^x \omega^{-2} ds \\ \omega_x & \omega_x \int^x \omega^{-2} ds + \omega^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_{1,x} & \omega_{2,x} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

où ω_1, ω_2 sont des solutions indépendantes. Il est toutefois essentiel que ϕ dépende de y , alors nous effectuons le simple changement de variable $\omega = h(y)\omega$, tel que

$$\phi = \begin{pmatrix} h(y)\omega_1 & \frac{1}{h(y)}\omega_2 \\ h(y)\omega_{1,x} & \frac{1}{h(y)}\omega_{2,x} \end{pmatrix}.$$

À partir de ϕ , il nous est possible d'obtenir M via l'équation

$$\begin{aligned} M = (D_y \phi) \phi^{-1} &= \begin{pmatrix} h'\omega_1 & -\frac{h'}{h^2}\omega_2 \\ h'\omega_{1,x} & -\frac{h'}{h^2}\omega_{2,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h}\omega_{2,x} & -\frac{1}{h}\omega_2 \\ -h\omega_{1,x} & h\omega_1 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} \frac{h'}{h}(\omega_1\omega_{2,x} + \omega_2\omega_{1,x}) & -\frac{h'}{h}(2\omega_1\omega_2) \\ \frac{h'}{h}(2\omega_{1,x}\omega_{2,x}) & -\frac{h'}{h}(\omega_1\omega_{2,x} + \omega_2\omega_{1,x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme la matrice potentielle M ne dépend pas de y , alors nécessairement le terme

$$\frac{h'}{h} = a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \quad \text{donc } h = e^{ay}, \quad \text{et rétrospectivement } \omega \rightarrow e^{ay}\omega.$$

Il est à noter que la trace de la matrice M est nulle, elle appartient donc à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ tel que souhaité.

Définissons le terme m_{12} comme

$$m_{12} := -2a\omega_1\omega_2 = -2a\omega^2 \int^x \omega^{-2} ds.$$

De là, nous pouvons calculer ω en terme de m_{12} , soit

$$\int^x \omega^{-2} ds = -\frac{m_{12}}{2a\omega^2},$$

puis en différenciant

$$\frac{1}{\omega^2} = -\frac{m_{12,x}}{2a\omega^2} + \frac{m_{12}}{a\omega^3}\omega_x$$

et en isolant

$$\begin{aligned} \frac{\omega_x}{\omega} &= \left(\frac{a}{m_{12}} + \frac{m_{12,x}}{2m_{12}} \right), \\ \ln \omega &= \frac{1}{2} \ln m_{12} + \int^x \frac{a}{m_{12}} ds, \end{aligned}$$

nous obtenons finalement

$$\omega = \sqrt{m_{12}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right] \equiv \omega_1. \quad (3.32)$$

Pour obtenir ω_2 , il suffit de remplacer ω

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 \int^x \omega_1^{-2} ds, \\ &= \sqrt{m_{12}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right] \frac{-1}{2a} \int^x \frac{-2a}{m_{12}} \exp \left[-2 \int^s \frac{a}{m_{12}} ds' \right] ds, \\ &= \sqrt{m_{12}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right] \frac{-1}{2a} \exp \left[-2 \int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\omega_2 = -\frac{\sqrt{m_{12}}}{2a} \exp \left[-\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right]. \quad (3.33)$$

Il est à noter que les équations (3.32) et (3.33) concordent avec les résultats obtenus dans [51].

À partir de ω_1 et ω_2 écrits en terme de m_{12} , nous pouvons exprimer toute la matrice potentielle M en terme de m_{12} . Commençons par donner les dérivées de ω_1 et ω_2

$$\omega_{1,x} = \frac{m_{12,x} + 2a}{2\sqrt{m_{12}}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right], \quad \omega_{2,x} = \frac{2a - m_{12,x}}{4a\sqrt{m_{12}}} \exp \left[-\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right].$$

Nous savons que

$$m_{11} = -m_{22} = a(\omega_1 \omega_{2,x} + \omega_2 \omega_{1,x}).$$

En substituant, puis en simplifiant

$$\begin{aligned} m_{11} &= a \left(\sqrt{m_{12}} \frac{2a - m_{12,x}}{4a\sqrt{m_{12}}} - \frac{m_{12,x} + 2a}{2\sqrt{m_{12}}} \frac{\sqrt{m_{12}}}{2a} \right), \\ &= \frac{2a - m_{12,x}}{4} - \frac{m_{12,x} + 2a}{4}, \end{aligned}$$

nous arrivons à

$$m_{11} = -m_{22} = -\frac{1}{2}m_{12,x}.$$

Nous pouvons effectuer un calcul similaire pour obtenir m_{21} , soit

$$m_{21} = 2a\omega_{1,x}\omega_2 = 2a \left(\frac{m_{12,x} + 2a}{2\sqrt{m_{12}}} \right) \left(\frac{2a - m_{12,x}}{4a\sqrt{m_{12}}} \right) = \frac{4a^2 - (m_{12,x})^2}{4m_{12}}.$$

Par contre, pour le terme m_{21} , il est possible de l'écrire avec la seconde dérivée de m_{12} . Voici comment l'obtenir. Tout d'abord,

$$\frac{\omega_{1,xx}}{\omega_1} = \alpha,$$

d'autre part, nous trouvons aisément que

$$\begin{aligned}\omega_{xx} &= \left(-\frac{m_{12,x} + 2a}{4(m_{12})^{\frac{3}{2}}} m_{12,x} + \frac{m_{12,xx}}{2\sqrt{m_{12}}} \right) \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right] + \frac{m_{12} + 2\alpha}{2\sqrt{m_{12}}} \frac{a}{m_{12}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right], \\ &= \left(\frac{-(m_{12,x})^2 - 2am_{12,x} + 2m_{12,xx}m_{12} + 2am_{12,x} + 4a^2}{4(m_{12})^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right]}{\sqrt{m_{12}} \exp \left[\int^x \frac{a}{m_{12}} ds \right]}, \\ \frac{\omega_{1,xx}}{\omega_1} &= -\frac{(m_{12,x})^2}{4(m_{12})^2} - \frac{am_{12,x}}{2(m_{12})^2} + \frac{m_{12,xx}}{2m_{12}} + \frac{am_{12,x}}{2m_{12}^2} + \frac{a^2}{(m_{12})^2} = \alpha, \\ \alpha m_{12} &= -\frac{(m_{12,x})^2}{4m_{12}} + \frac{m_{12,xx}}{2} + \frac{a^2}{m_{12}}\end{aligned}$$

et finalement

$$\alpha m_{12} - \frac{m_{12,xx}}{2} = -\frac{(m_{12,x})^2}{4m_{12}} + \frac{a^2}{m_{12}} = m_{21}.$$

Afin d'alléger la notation, nous allons renommer le terme m_{12} par f . Nous pouvons donc écrire les matrices potentielles de la façon suivante

$$\begin{aligned}L &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{f_x}{2} & f \\ \alpha f - \frac{f_{xx}}{2} & \frac{f_x}{2} \end{pmatrix}, \\ \phi &= \begin{pmatrix} \sqrt{f} \exp \left[\int^x \frac{a}{f} ds \right] & -\frac{\sqrt{f}}{2a} \exp \left[-\int^x \frac{a}{f} ds \right] \\ \frac{f_x + 2a}{2\sqrt{f}} \exp \left[\int^x \frac{a}{f} ds \right] & \frac{2a - f_x}{4a\sqrt{f}} \exp \left[-\int^x \frac{a}{f} ds \right] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La condition de compatibilité du PLS ($M_x + [M, L] = 0$) est satisfaite pour tout f telle que

$$f_{xxx} - 4\alpha f_x - 2\alpha_x f = 0, \quad (3.35)$$

où

$$\alpha = \frac{f_{xx}}{2f} - \frac{(f_x)^2}{4f^2} + \frac{a^2}{f^2}.$$

En conclusion, n'importe quelle EDO du type de 3.30 peut être résolue par cette paire de Lax. Il est aisé de vérifier que l'équation (3.35) est satisfaite

$$\alpha_x = \frac{f_{xxx}}{2f} - \frac{f_x f_{xx}}{2f^2} - \frac{f_x f_{xx}}{2f^2} + \frac{(f_x)^3}{f^3} - \frac{2a^2}{f^3} f_x,$$

$$f_{xxx} - 4 \left(\frac{f_{xx}}{2f} - \frac{(f_x)^2}{4f^2} + \frac{a^2}{f^2} \right) f_x - 2 \left(\frac{f_{xxx}}{2f} - \frac{f_x f_{xx}}{f^2} + \frac{(f_x)^3}{2f^3} - \frac{2a^2 f_x}{f^3} \right) f \equiv 0.$$

À titre d'exemple, si $\alpha = f$, alors nous obtenons le cas stationnaire de KdV.

3.7.1 Équation de Riccati

Dans le cas de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

nous pouvons utiliser la transformation

$$y = -\frac{1}{a(x)} \frac{\omega'}{\omega}$$

pour ramener l'équation de Riccati à une équation linéaire du deuxième ordre en ω

$$\omega'' - \left(\frac{a'}{a} + b \right) \omega' + ac\omega = 0$$

qui peut être plus facile à résoudre. Dans certains cas, l'équation peut se réécrire sous la forme

$$\left(\frac{d}{dx} - q(x) \right) \left(\frac{d}{dx} + q(x) \right) u = 0$$

ou sous la forme

$$\left(\frac{d}{dx} + q(x) \right) \left(\frac{d}{dx} - q(x) \right) u = 0$$

et donc

$$u'' - (\epsilon q' + q^2)u = 0, \quad \epsilon^2 = 1.$$

Nous remarquons ici que nous retrouvons la même forme que pour le problème de Sturm-Liouville, soit

$$u'' - \alpha(x)u = 0,$$

où

$$\alpha(x) = q^2(x) + \epsilon q'(x).$$

Nous pouvons utiliser, dans certains cas, cette méthode de façon successive jusqu'à l'obtention de la solution.

Comme nous avons que

$$q^2 + \epsilon q_x = \alpha = \frac{f_{xx}}{2f} - \frac{(f_x)^2}{4f^2} + \frac{a^2}{f^2},$$

il serait intéressant d'obtenir f en fonction de q . Pour ce faire, nous allons demander que q en terme de f prenne la forme

$$q = \frac{\beta f_x + \gamma a}{f}.$$

Nous aurons donc

$$q^2 + \epsilon q_x = \epsilon \beta \frac{f_{xx}}{f} + (\beta^2 - \epsilon \beta) \frac{f_x^2}{f^2} + \gamma^2 \frac{a^2}{f^2} + (2\beta\gamma - \epsilon\gamma) \frac{af_x}{f^2}$$

qui entrainera les conditions suivantes sur β et γ

$$\epsilon\beta = \frac{1}{2}, \quad \beta^2 - \epsilon\beta = -\frac{1}{4}, \quad \gamma^2 = 1, \quad 2\beta\gamma - \epsilon\gamma = 0.$$

Nous pouvons voir facilement que si

$$\beta = \frac{\epsilon}{2}, \quad \gamma^2 = 1,$$

les conditions sont satisfaites. Nous avons maintenant q en terme de f

$$q = \frac{\epsilon f/2 + \gamma a}{f},$$

cependant nous cherchions f en terme de q . Suite à quelques transformations purement algébriques, nous obtenons une équation différentielle de type Bernouilli linéaire non-homogène

$$f_x = 2\epsilon q f - 2\epsilon \gamma a.$$

La solution de f est donnée par

$$f = \left(k - 2\epsilon \gamma a \int^x \exp \left[-2\epsilon \int^s q d\xi \right] ds \right) \exp \left[2\epsilon \int^x q ds \right].$$

La matrice potentielle M prendra donc la forme

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon \{ \gamma a - q \exp [2\epsilon \int^x q ds] (k - 2\epsilon \gamma a \int^x \exp [-2\epsilon \int^s q d\xi] ds) \} \\ 2\gamma a q - q^2 \exp [2\epsilon \int^x q ds] (k - 2\epsilon \gamma a \int^x \exp [-2\epsilon \int^s q d\xi] ds) \\ (k - 2\epsilon \gamma a \int^x \exp [-2\epsilon \int^s q d\xi] ds) \exp [2\epsilon \int^x q ds] \\ -\epsilon \{ \gamma a - q \exp [2\epsilon \int^x q ds] (k - 2\epsilon \gamma a \int^x \exp [-2\epsilon \int^s q d\xi] ds) \} \end{pmatrix}$$

qui obéit à la condition de courbure nulle

$$D_x M + [M, L] = 0.$$

Afin d'alléger la notation, nous allons noter

$$Q := 2\epsilon \int^x q ds \quad \text{et} \quad P := c - 2\epsilon \gamma a \int^x e^{-Q} ds.$$

Ceci nous donne les matrices potentielles

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \epsilon (\gamma a - q e^Q P) & e^Q P \\ 2\gamma a q - q^2 e^Q P & -\epsilon (\gamma a - q e^Q P) \end{pmatrix},$$

et la matrice ϕ est donnée par

$$\phi = \begin{pmatrix} \sqrt{P e^Q} \exp \left(\int^x \frac{a e^{-Q} ds}{P} + ay \right) & -\frac{\sqrt{P e^Q}}{2a} \exp \left(-\int^x \frac{a e^{-Q} ds}{P} - ay \right) \\ \frac{\epsilon q e^Q P - \epsilon \gamma a + a}{\sqrt{P e^Q}} \exp \left(\int^x \frac{a e^{-Q} ds}{P} + ay \right) & \frac{a - \epsilon q e^Q - \epsilon \gamma a}{2a \sqrt{P e^Q}} \exp \left(-\int^x \frac{a e^{-Q} ds}{P} - ay \right) \end{pmatrix}.$$

En ayant ces trois matrices, nous pouvons chercher les surfaces F associées aux symétries généralisées. Pour ces surfaces, nous aurons les vecteurs tangents donnés par

$$D_x F = \phi^{-1} (\text{prv}_R L) \phi, \quad D_y F = \phi^{-1} (\text{prv}_R M) \phi,$$

où

$$v_R = R[u] \partial_u. \quad (3.36)$$

Si nous appliquons l'opérateur prolongation sur l'équation de Sturm-Liouville/Riccati, nous obtenons l'équation déterminante pour les symétries généralisées

$$D_x^2 R[u] - (q^2 + \epsilon q_x) R[u] = 0 \quad (3.37)$$

ou sous sa forme développée

$$R_{xx} + \alpha u R_u + u_x^2 R_{uu} + \alpha_x u R_{ux} + \alpha u_x R_{ux} + \alpha^2 u^2 R_{u_x u_x} - \alpha R + 2u_x R_{xu} + 2\alpha u R_{xu_x} + 2\alpha u u_x R_{u u_x} = 0.$$

Une symétrie qui satisfait cette équation est celle de la dilatation en u , soit

$$R[u] = u.$$

Si nous remplaçons $R[u]$ dans l'équation déterminante, nous voyons qu'elle est identiquement satisfaite modulo l'équation de Sturm-Liouville

$$D_x^2 u - (q^2 + \epsilon q_x)u = u_{xx} - (q^2 + \epsilon q_x)u = 0.$$

De plus, cette symétrie n'impose aucune restriction sur q .

Une autre symétrie qui respecte l'équation déterminante est donnée par

$$R[u] = xu_x,$$

toutefois, elle impose une condition à $\alpha = (q^2 + \epsilon q_x)$. Si nous remplaçons cette symétrie dans l'équation déterminante, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= D_{xx}(xu_x) - \alpha xu_x, \\ &= D_x(u_x + xu_{xx}) - \alpha xu_x, \\ &= u_{xx} + u_{xx} + xu_{3x} - \alpha xu_x, \\ &= 2\alpha u + xD_x(\alpha u) - \alpha xu_x, \quad \text{modulo } u_{xx} - \alpha u = 0, \\ &= 2\alpha u + x\alpha_x u. \end{aligned}$$

Puisque u n'est pas fixe, nous demandons que $2\alpha + x\alpha_x = 0$. De là, nous pouvons facilement intégrer pour obtenir que

$$\alpha = (q^2 + \epsilon q_x) = \frac{c}{x^2}.$$

Nous pouvons facilement résoudre q en terme de x puisqu'il s'agit d'une équation de Riccati bien définie. Sa solution est

$$q = \frac{\beta}{x} + \frac{1 - 2\beta}{(1 - 2\beta)kx^{2\beta} + x},$$

telle que k est la constante d'intégration et β est la constante de la solution particulière

$$q_1 = \frac{\beta}{x}, \quad \beta = \frac{\epsilon}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4c} \right).$$

Soit l'équation dont nous chercherons les caractéristiques différentielles

$$u_{xx} - \alpha u = 0, \quad \alpha := (q^2 + \epsilon q_x)$$

et la paire de Lax

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_{xx}/u & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_x & f \\ \alpha f - \frac{1}{2}f_{xx} & \frac{1}{2}f_x \end{pmatrix}, \quad \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

Toutefois, nous pouvons réécrire M de la façon suivante puisque $f := -2au_1u_2$ et $u_1 := u$ $u_2 := u \int^x u^{-2}ds$,

$$M = a \begin{pmatrix} 1 + 2uu_x J & -2u^2 J \\ 2\frac{u_x}{u} + 2u_x^2 J & -1 - 2uu_x J \end{pmatrix}, \quad J := \int^x u^{-2}ds.$$

Comme nous avons défini précédemment (3.36), (3.37), le champ vectoriel et l'équation déterminante sont donnés par

$$v_R = R[u]\partial_u, \quad D_x^2 R - \alpha R = 0.$$

En appliquant l'opérateur prolongation sur les matrices potentielles L et M , nous obtenons

$$A := \text{pr}(v_R)L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{D_x^2}{u} + \frac{u_{xx}R}{u^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B := \text{pr}(v_R)M = 2a \begin{pmatrix} D_x(uR)J & -2uRJ \\ D_x\left(\frac{R}{u}\right) + 2D_xRu_xJ & D_x(Ru)J \end{pmatrix},$$

où A et B apparaissent dans les vecteurs tangents,

$$D_x F = \phi - 1A\phi, \quad D_y F = \phi^{-1}B\phi.$$

En ayant les matrices A et B , nous pouvons obtenir la première forme fondamentale

$$I = Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2,$$

où les coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) = 0, \\ F &= \frac{1}{2} \text{tr}(AB) = -2aRJ (D_x^2 R - \alpha R), \\ G &= \frac{1}{2} \text{tr}(B^2) = 2a^2 \left[D_x \left(\frac{R}{u} \right) + u^4 \left(D_x \left(\frac{R}{u} \right) \right)^2 J^2 \right]. \end{aligned}$$

Ces résultats impliquent que notre première forme fondamentale est donnée par

$$I = 2a \left([2RJ (\alpha R - D_x^2 R)] dx dy + a \left[D_x \left(\frac{R}{u} \right) + u^4 \left(D_x \left(\frac{R}{u} \right) \right)^2 J^2 \right] dy^2 \right).$$

Nous pouvons voir que le vecteur tangent $D_x F$ est isotrope. Pour trouver la deuxième forme fondamentale, nous avons besoin du vecteur normal N donné par

$$N = \frac{[A, B]}{||[A, B]||} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} D_x(\ln(uR)) & -1 \end{pmatrix}.$$

La deuxième forme fondamentale II est alors donnée par

$$\begin{aligned} II &= edx^2 + 2fdx dy + gdy^2, \\ II &= \left[\frac{\alpha}{u} R - \frac{D_x^2 R}{u} \right] dx^2 + 4au^2 J \left[\frac{\alpha}{u} R - \frac{D_x^2 R}{u} \right] dx dy \\ &\quad + 2aJ \left[D_x(D_y Ru) - D_y R \frac{D_x(uR)}{2R} + a(-5Ru_x + 3uD_x R) \right. \\ &\quad \left. + auu_x J \left(-3Ru_x + 5D_x Ru - \frac{[D_x(uR)]^2}{u_x R} \right) \right] dy^2. \end{aligned}$$

Pour terminer, les courbures K et H ,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG + Eg - 2fF}{2(EG - F^2)},$$

sont alors

$$K = \frac{4u^2}{R} - \frac{D_x(D_y Ru) - D_y R \frac{D_x(uR)}{2R} + a(-5Ru_x + 3uD_x R)}{2au^2 R^2 J \left[\frac{\alpha R}{u} - \frac{D_x^2}{u} \right]} - \frac{auu_x J \left(-3Ru_x + 5D_x Ru - \frac{[D_x(uR)]^2}{u_x R} \right)}{2au^2 R^2 J \left[\frac{\alpha R}{u} - \frac{D_x^2}{u} \right]},$$

$$H = \frac{u}{R} - \frac{D_x(R/u)}{8au^2 R^2 J^2 \left[\frac{\alpha R}{u} - \frac{D_x^2 R}{u} \right]} - \frac{(uD_x R - u_x R)^2}{8au^2 R^2 \left[\frac{\alpha R}{u} - \frac{D_x^2 R}{u} \right]^2}.$$

3.7.2 Équation de Lamé

Dans cette sous section, nous allons effectuer une dérivation de l'équation de Sturm-Liouville vers l'équation de Lamé pour déterminer sa paire de Lax associée.

Considérons le problème linéaire

$$\omega_{xx} - \alpha\omega = 0, \quad \text{où } \alpha = \frac{1}{2u}g'(u) - \frac{1}{2u^2}g(u) + \frac{k^2}{u^2}$$

associé à l'équation différentielle non-linéaire

$$u_{xx} = g'(u)$$

qui admet l'équation différentielle du premier ordre

$$u_x^2 = 2g(u). \quad (3.38)$$

Ici, la constante d'intégration est absorbée dans f puisque f est arbitraire. Considérons le cas particulier où

$$g(u) = 2(u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2),$$

$$g'(u) = 2(3u^2 + 2\tilde{g}_2 u + \tilde{g}_3).$$

De là

$$\alpha = \frac{1}{2u}2(3u^2 + 2\tilde{g}_2 u + \tilde{g}_3) - \frac{1}{2u^2}2(u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2) + \frac{k^2}{u^2} = 2u + \tilde{g}_2.$$

L'équation (3.38) prend la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_x^2 &= 2(u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2), \\ u_x &= [4(u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2)]^{1/2}, \\ x &= \int_0^{\mathcal{P}(x)} \frac{du}{2(u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2)^{1/2}}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Définissons

$$u = \tilde{u} - \frac{\tilde{g}_2}{3},$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned}u^3 + \tilde{g}_2 u^2 + \tilde{g}_3 u + k^2 &= \left(\tilde{u} - \frac{\tilde{g}_2}{3}\right)^3 + \tilde{g}_2 \left(\tilde{u} - \frac{\tilde{g}_2}{3}\right)^2 + \tilde{g}_3 \left(\tilde{u} - \frac{\tilde{g}_2}{3}\right) + k^2, \\ &= \tilde{u}^3 + \left(-\frac{\tilde{g}_2^2}{3} + \tilde{g}_3\right)\tilde{u} + \left(-\frac{\tilde{g}_2^3}{27} - \frac{\tilde{g}_2 \tilde{g}_3}{3} + \frac{\tilde{g}_2^3}{9} + k^2\right),\end{aligned}$$

où

$$g_2 := 4\left(\frac{\tilde{g}_2^2}{3} - \tilde{g}_3\right), \quad g_3 := 4\left(\frac{-2}{27}\tilde{g}_2^3 + \frac{\tilde{g}_2 \tilde{g}_3}{3} - k^2\right).$$

Ceci amène l'équation (3.39) à

$$x = \int_0^{\mathcal{P}(x)} \frac{d\tilde{u}}{(4\tilde{u}^3 - g_2 \tilde{u} - g_3)^{1/2}} \iff \tilde{u}_x^2 = 4\tilde{u}^3 - g_2 \tilde{u} - g_3,$$

ce qui coïncide avec la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass, soit la fonction qui satisfait

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - g_2 \mathcal{P}(z) - g_3.\tag{3.40}$$

De plus, nous avons

$$\tilde{u} = \mathcal{P}(x) \Rightarrow u = \tilde{u} - \frac{\tilde{g}_2}{3} = \mathcal{P}(x) - \frac{\tilde{g}_2}{3},$$

de l'équation (3.40), nous obtenons pour α

$$\alpha = 2u + \tilde{g}_2 = \left(\mathcal{P}(x) - \frac{\tilde{g}_2}{3}\right) + b = 2\mathcal{P}(x) + \frac{\tilde{g}_2}{3}.$$

De là, nous obtenons l'équation de Lamé ($n = 1$)

$$\omega_{xx} - (2\mathcal{P}(x) + h)\omega = 0, \quad h \equiv \frac{\tilde{g}_2}{3}.\tag{3.41}$$

L'équation de Lamé est pour $n \in \mathbb{Z}^+$ un entier positif

$$\omega_{xx} - (h + n(n+1)\mathcal{P}(z))\omega = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

ou de façon équivalente

$$\omega_{xx} - [n(n+1)c^2 \operatorname{sn}(x) - h]\omega = 0,$$

où $\operatorname{sn}(x)$ est la fonction elliptique de Jacobi définie par

$$x = \int_0^{\operatorname{sn}} [(1-t^2)(1-c^2t^2)]^{-1/2} dt$$

et où c^2 est appelé le module de $\operatorname{sn}(x)$. Les périodes de base de $\operatorname{sn}(x)$ sont dénotées par $2K$ et $2iK'$. Nous sommes intéressés aux périodes réelles $2K$ qui sont données par

$$K = \int_0^{\pi/2} (1 - c^2 \operatorname{sn}(\phi))^{-1/2} d\phi.$$

Si nous introduisons un paramètre b relié à h par la définition de l'équation transcendente $\mathcal{P}(b) = h$, l'intégrale générale de l'équation (3.41) prend la forme tirée de [60, p.379]

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) = \left(\exp[-z\zeta(b)] \frac{\sigma(z+b)}{\sigma(z)}, \exp[z\zeta(b)] \frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z)} \right),$$

où les fonctions σ et ζ sont les fonctions de Weierstrass. En reprenant les résultats obtenus pour le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_x & f \\ \alpha f - \frac{1}{2}f_{xx} & \frac{1}{2}f_x \end{pmatrix}, \\ \phi &= \begin{pmatrix} e^{ay}u & e^{-ay}u \int u^{-2}dx \\ e^{ay}u_x & e^{-ay}u_x \int u^{-2}dx + \frac{e^{-ay}}{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en l'utilisant pour le cas de l'équation de Lamé, nous obtenons

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(b) & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a\partial_x(\psi_1\psi_2) & 2a\psi_1\psi_2 \\ 2a\psi_{1,x}\psi_{2,x} & -a\partial_x(\psi_1\psi_2) \end{pmatrix}, \\ \phi &= \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_{1,x} & \psi_{2,x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les solutions fondamentales de l'équation de Lamé. Si nous considérons le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel,

$$F = \phi^{-1} \partial_b \phi,$$

où nous prendrons la base

$$e_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons la surface suivante.

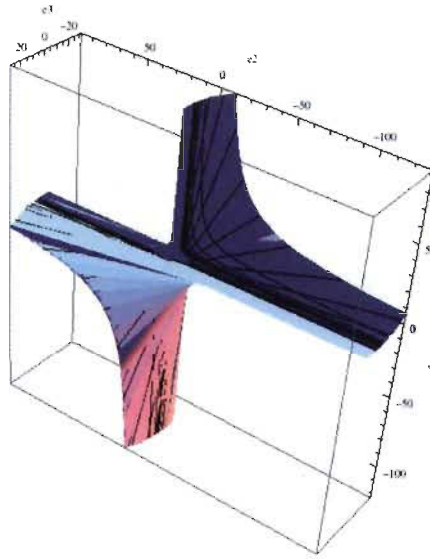


FIGURE 3.7 – La surface pour la formule d'immersion de Sym-Tafel avec les paramètres $a = b = 1$ et $g_1 = g_2 = 0$

Pour le cas de la jauge, considérons la surface

$$F = \phi^{-1} S \phi, \quad \text{où} \quad S = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = m e_3,$$

pour le cas où m est une constante. Nous obtenons la surface

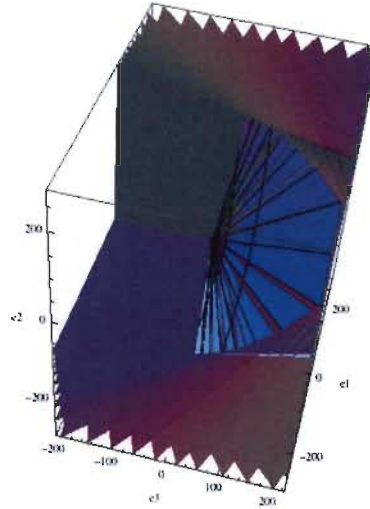


FIGURE 3.8 – La surface pour la jauge avec les paramètres $m = 1$, $g_1 = g_2 = 0$ et $a = b = 1$

Dans le cas des symétries généralisées, considérons le champ de vecteurs

$$\vec{v} = R[u]\partial_u.$$

En appliquant la prolongation de ce champ de vecteurs sur l'équation de Lamé, nous obtenons l'équation déterminante

$$\begin{aligned} R_{xx} + 2u_x R_{xu} + 2\alpha u R_{xu_x} + u_x^2 + 2\alpha u u_x R_{uu_x} \\ + \alpha^2 u^2 R_{u_x u_x} + \alpha u R_u + (2\mathcal{P}'(x)u + \alpha u_x) R_{u_x} - \alpha R = 0. \end{aligned}$$

Si $R = R(x)$, nous pouvons trouver une solution explicite admettant un principe de superposition en terme des fonctions de Weierstrass

$$R = c_1\psi_1 + c_2\psi_2.$$

La surface pour les symétries généralisées est donnée par

$$F = \phi^{-1}(\text{pr}\vec{v}\phi),$$

où le champ de vecteurs est donné par

$$\vec{v} = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2)\partial_u.$$

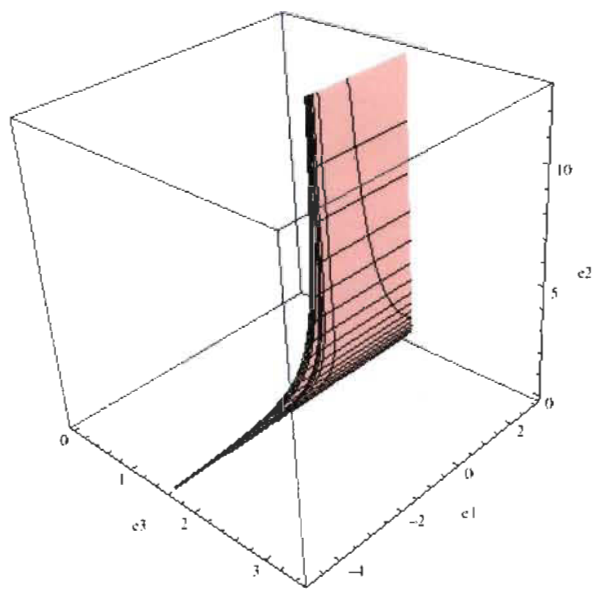


FIGURE 3.9 – La surface pour la symétrie généralisée avec les paramètres $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 1$ et $a = b = 1$

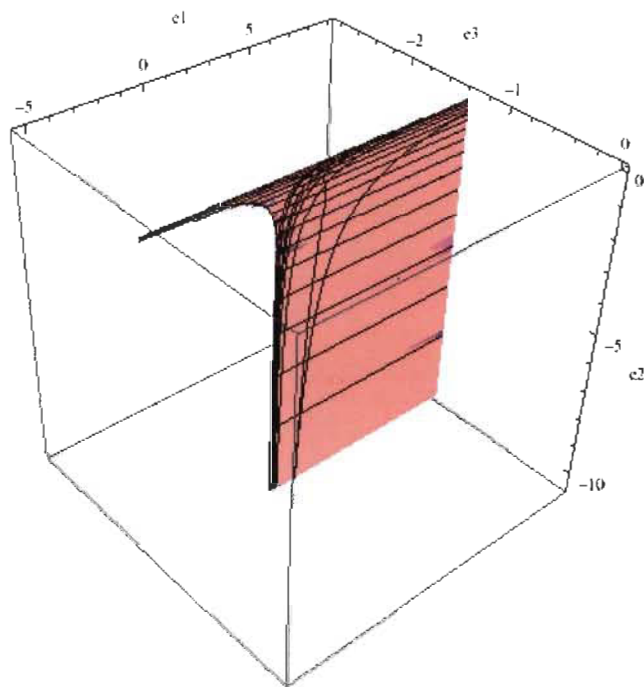


FIGURE 3.10 – La surface pour la symétrie généralisée avec les paramètres $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $g_1 = g_2 = 10$ et $a = -1 = -b$

Caractérisation de la surface par une jauge

Prenons la jauge suivante

$$S = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

et écrivons les matrices A et B comme

$$A = D_x S + [S, L] = \mu \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = D_y S + [S, M] = \mu \begin{pmatrix} 0 & 2f \\ -2\alpha f + f_{xx} & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet d'obtenir les coefficients de la première forme fondamentale

$$E = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) = -4\mu^2 \alpha,$$

$$F = \frac{1}{2} \text{tr}(AB) = -4\alpha\mu^2 f + \mu^2 f_{xx},$$

$$G = \frac{1}{2} \text{tr}(B^2) = -4\mu^2 \alpha f^2 + 2\mu^2 f f_{xx},$$

pour finalement avoir

$$I = \mu^2 [-4\alpha dx^2 + 2(f_{xx} - 4\alpha f) dx dy + (2f f_{xx} - 4\alpha f^2) dy^2].$$

Nous pouvons calculer le vecteur normal via l'équation

$$\phi N \phi^{-1} = \frac{[A, B]}{||[A, B]||} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_3.$$

De là, nous trouvons aisément que

$$e = \frac{1}{2} \text{tr}(N D_x^2 F) = 4\mu\alpha,$$

$$f = \frac{1}{2} \text{tr}(N D_x D_y F) = \mu(4\alpha f - f_{xx}),$$

$$g = \frac{1}{2} \text{tr}(N D_y^2) = 4\mu\alpha f^2 - 2\mu f f_{xx},$$

ce qui nous donne la deuxième forme fondamentale

$$\Pi = \mu [4\alpha dx^2 + 2(4\alpha - f_{xx}) dx dy + (4\alpha f^2 - 2\mu f f_{xx}) dy^2].$$

Nous pouvons maintenant trouver les courbures de Gauss et moyenne respectivement

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$H = \frac{Eg + eG - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{-1}{\mu}.$$

Nous pouvons voir que l'équation des points umbiliques est identiquement satisfaite

$$H^2 - K \equiv 0,$$

ce qui montre que la surface n'admet pas de point umbilique.

3.8 Conclusion

1. Nous avons adapté la procédure de Fokas-Gel'fand pour construire des surfaces solitoniques associées aux EDO intégrables admettant une représentation de Lax pour les deux cas de représentation de courbure nulle.
2. Nous avons démontré, comme pour le cas des EDP, que le problème demande l'étude des symétries conformes selon le paramètre spectral, les transformations de jauge du PLS et les symétries généralisées du modèle associé et de son PLS.
3. Nous avons construit une paire de Lax pour une EDO du second ordre incluant, parmi d'autres, le cas des intégrales elliptiques et le problème de Sturm-Liouville. Nous avons, par la suite, résolu le PLS et trouvé explicitement la forme la plus générale de la fonction d'onde.

4. Nous avons construit des surfaces plongées dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ par des méthodes analytiques pour le cas général où $(u_x)^2 = f(u)$, avec une fonction arbitraire $f(u)$ et aussi pour l'équation de Sturm-Liouville $u_{xx} - \alpha(x)u = 0$ tel que α est une fonction arbitraire de x .
5. Nous avons identifié trois symétries généralisées de l'EDO elliptique et déterminé si elles sont également des symétries du PLS, c'est-à-dire si la fonction d'immersion peut être intégrée explicitement comme $F = \phi^{-1} \text{pr} \vec{v}_Q \phi$.
6. La procédure a été appliquée à des exemples, y compris les fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass ainsi que Lamé. Nous avons trouvé les deux premières formes fondamentales, les courbures de Gauss et moyenne pour les surfaces ainsi que les graphes des surfaces pour différents paramètres, ce qui nous a mené à plusieurs types de surfaces.

3.9 Perspectives futures

Nous voudrions considérer des surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie associées aux équations KdV et mKdV, soit respectivement,

$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u = 0, \quad u_t + u_{xxx} - 6u_x u^2 = 0,$$

ou encore de Schrödinger

$$i\hbar u_t - \frac{\hbar^2}{2m} u_{xx} = V(x, t)u.$$

1. Les états stationnaires des équations de KdV et mKdV ($u_t = 0$) sont liées aux fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass tandis que les états station-

naires de l'équation de Schrödinger sont liés à ceux de l'équation de Sturm-Liouville.

2. Il serait naturel de comparer les surfaces associées aux EDP aux surfaces des EDO associées à leurs états stationnaires (la variable auxiliaire y serait maintenant t).
3. Nous pouvons utiliser les solutions exactes pour la fonction d'onde pour les états stationnaires afin d'étendre cette solution dans le voisinage des états stationnaires et chercher des solutions pour les fonctions d'onde pour les cas des EDP.
4. Nous pouvons comparer les surfaces associées à des états stationnaires, qui dépendent du temps de façon exponentielle, aux surfaces des EDPs dans les voisinages des états stationnaires. Nous pouvons effectuer une analyse asymptotique ou de variation des paramètres afin d'étudier les surfaces des EDP utilisant les surfaces des EDO comme approximations.

Chapitre 4

Symétries des équations différentielles partielles et leurs surfaces solitoniques

Nous présentons dans ce chapitre certaines notions, définitions et théorème de base décrivant des surfaces plongées dans des algèbres de Lie (espaces multi-dimensionnels). Ces notions seront par la suite utilisées pour trouver les symétries généralisées des EDP, dans ce cas-ci les équations de Sine-Gordon, de Sinh-Gordon, de Ernst, de Schrödinger non-linéaire et de Bianchi, et leurs applications solitoniques. Nous basons cette présentation sur les ouvrages de [49,78].

4.1 Description des surfaces

Définition 4.1. Soit $\Psi\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ et $\Psi_j\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, $j = 1, \dots, N$, les éléments de l'anneau $\mathcal{R}^{(N)}$. La dérivée de Fréchet de Ψ dans la direction Ψ_j est définie par

$$\left(\frac{D\Psi}{D\theta_j} \right) \Psi_j = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Psi\{\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_j + \epsilon \Psi_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_N\} \right|_{\epsilon=0}.$$

Exemple 4.1 : Soit

$$\Psi\{\theta\} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \sin \theta.$$

La dérivée de Fréchet de $\Psi\{\theta\}$ dans la direction $\varphi\{\theta\}$ est donnée par

$$\left(\frac{D\Psi}{D\theta} \right) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - (\cos \theta) \varphi.$$

Définition 4.2. Supposons que l'ensemble de fonctions différentielles $\{\theta_j(u, v)\}_1^N$ satisfait le système d'EDP $\Omega_j[\theta] = 0$ tel que $j = 1, \dots, N$. L'ensemble des fonctions scalaires $\{\varphi\}_1^N$ est appelé une symétrie généralisée du système $\Omega = 0$ si et seulement si $\{\varphi\}_1^N$ sont des éléments de l'anneau $\mathcal{R}^{(N)}$ et s'ils satisfont le système d'équations linéaires

$$\sum_1^N \left(\frac{D\Omega_k}{D\theta_j} \right) \varphi_j = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Exemple 4.2 : Une symétrie de l'équation de Sine-Gordon est un élément de l'anneau $\mathcal{R}^{(1)}$ qui satisfait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - (\cos \theta) \varphi = 0. \quad (4.1)$$

Par exemple, $\varphi = \partial\theta/\partial u$ est une symétrie de l'équation de Sine-Gordon. En effet, φ est un élément de $\mathcal{R}^{(1)}$ et est solution de (4.1).

La dérivée de Fréchet peut s'écrire sous une forme équivalente en utilisant la prolongation d'un champ de vecteur ω_P

$$\frac{D\Omega_k}{D\theta_j} \varphi_j = \text{pr}\omega_\varphi \Omega_k,$$

voir la Proposition 5.25 [78, p.307].

4.1.1 Formule d'immersion de Fokas-Gel'fand

Supposons le système matriciel suivant d'EDP $\Omega[\theta] = 0$ avec deux variables indépendantes x^1 et x^2 et les variables dépendantes θ^k sous la condition de courbure nulle

(CCN) de la forme

$$\Omega[\theta] \equiv \partial_{x^1} \mathcal{U} - \partial_{x^2} \mathcal{V} + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0 \quad (4.2)$$

qui admet un PLS donné par

$$\partial_{x^1} \phi = \mathcal{U} \phi, \quad \partial_{x^2} \phi = \mathcal{V} \phi, \quad (4.3)$$

où $\phi(x^1, x^2, \lambda) \in G$, $\mathcal{U}(x^1, x^2, \lambda), \mathcal{V}(x^1, x^2, \lambda) \in \mathfrak{g}$ et λ est le paramètre spectral. Nous faisons l'hypothèse que le système (4.2) ne dépend pas du paramètre spectral λ .

Il est à noter que aussi longtemps qu'il existe des matrices $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{g}$ satisfaisant CCN (4.2), il existe une fonction d'onde ϕ qui prend ses valeurs dans le groupe G correspondant à l'algèbre \mathfrak{g} qui satisfait le PLS (4.3).

Considérons une symétrie infinitésimale du système matriciel d'EDP (4.2) et de son PLS (4.3) donnée par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}' \\ \mathcal{V}' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \\ \psi \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} A \\ B \\ \chi \end{pmatrix}, \quad 0 < \epsilon \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

avec la condition que $\mathcal{U}', \mathcal{V}' \in \mathfrak{g}$ et $\psi' \in G$ tels que $\mathcal{U}', \mathcal{V}'$ et ψ' satisfont le PLS et la CCN. De telles déformations sont requises pour avoir la même structure de singularité que \mathcal{U} et \mathcal{V} en λ donnée par (4.3) et (4.2). Il s'agit des matrices $A(x^1, x^2, \lambda), B(x^1, x^2, \lambda) \in \mathfrak{g}$ et $\chi(x^1, x^2, \lambda) \in G$ telles que

$$\psi' = \psi + \epsilon \chi \in G$$

obéissent aux contraintes différentielles provenant des déformations infinitésimales de (4.3) et (4.2). Les déformations infinitésimales des EDP (4.2) requièrent qu'il existe des fonctions matricielles A, B qui prennent leurs valeurs dans \mathfrak{g} et qui satisfont

$$\partial_{x^2} A - \partial_{x^1} B + [A, \mathcal{V}] + [\mathcal{U}, B] = 0. \quad (4.5)$$

La déformation infinitésimale de (4.3) implique que

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^1} = \mathcal{U} \chi + A \psi, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x^2} = \mathcal{V} \chi + B \psi. \quad (4.6)$$

Preuve : Partons du PLS primé et utilisons les déformations infinitésimales (4.4) pour obtenir par substitution directe

$$\begin{aligned} D_{x^1}\psi + \epsilon D_{x^1}\chi &= (\mathcal{U}^1 + \epsilon A)(\psi + \epsilon\chi), \\ D_{x^2}\psi + \epsilon D_{x^2}\chi &= (\mathcal{U}^2 + \epsilon B)(\psi + \epsilon\chi). \end{aligned}$$

En distribuant et en utilisant l'équation (4.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon D_{x^1}\chi &= \epsilon (\mathcal{U}^1\chi + A\psi) + \epsilon^2(\dots), \\ \epsilon D_{x^2}\chi &= \epsilon (\mathcal{U}^2\chi + B\psi) + \epsilon^2(\dots). \end{aligned}$$

Les termes en ϵ^2 sont négligeables et donc nous pouvons retrouver les équations (4.6)

$$\frac{\partial\chi}{\partial x^1} = \mathcal{U}\chi + A\psi, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x^2} = \mathcal{V}\chi + B\psi.$$

Pour obtenir l'équation (4.5), il suffit de calculer la condition de compatibilité des équations (4.6),

$$D_{x^2}\mathcal{U}^1\chi + \mathcal{U}^1 D_{x^2}\chi + D_{x^2}A\psi + A D_{x^2}\psi = D_{x^1}\mathcal{U}^2\chi + \mathcal{U}^2 D_{x^1}\chi + D_{x^1}B\psi + B D_{x^1}\psi.$$

Modulo le PLS (4.3) et (4.6), nous avons

$$D_{x^2}\mathcal{U}^1\chi + \mathcal{U}^1\mathcal{U}^2\chi + \mathcal{U}^1 B\psi + D_{x^2}A\psi + A\mathcal{U}^2\psi = D_{x^1}\mathcal{U}^2\chi + \mathcal{U}^2\mathcal{U}^1\chi + \mathcal{U}^1 A\psi + D_{x^1}B\psi + B\mathcal{U}^1\psi.$$

Pour terminer, nous pouvons utiliser (4.2) pour faire disparaître les termes contenant χ et en multipliant par $\psi^{-1} \in G$ par la droite, nous obtenons

$$D_{x^2}A - D_{x^1}B + [A, \mathcal{U}^2] + [\mathcal{U}^1, B] = 0 \quad (4.7)$$

qui est exactement (4.5). \square

Théorème 4.1 (38). *Supposons que nous avons les fonctions matricielles $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{g}$ et $\psi \in G$ qui satisfont le système matriciel d'EDP (4.2) et son PLS (4.3). Supposons que $A, B \in \mathfrak{g}$ sont des fonctions matricielles linéairement indépendantes qui satisfont (4.5). Alors il existe une fonction d'immersion $F(x^1, x^2)$ qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g} telle que les vecteurs tangents de la surface bidimensionnelle sont donnés par*

$$\partial_{x^1}F = \psi^{-1}A\psi, \quad \partial_{x^2}F = \psi^{-1}B\psi. \quad (4.8)$$

Preuve : L'équation (4.5) représente les conditions de compatibilité pour (4.8), donc la fonction d'immersion F existe à une transformation affine près et peut être assumée dans \mathfrak{g} . \square

Corollaire 4.1. *Supposons que nous avons les fonctions matricielles $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{g}$ et $\psi \in G$ satisfaisant (4.2) et (4.3) et les fonctions matricielles linéairement indépendantes $A, B \in \mathfrak{g}$ qui satisfont (4.5). Alors, il existe une fonction matricielle $\chi(x^1, x^2, \lambda)$ telle que A, B, χ définissent une symétrie infinitésimale de (4.2) et (4.3). Il s'agit des fonctions matricielles A, B et χ satisfaisant la CCN (4.5) et le PLS (4.6).*

Preuve : Nous avons à démontrer que lorsque $A, B, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{g}$ et $\psi \in G$ satisfont (4.2), (4.3) et (4.5), alors il existe des fonctions matricielles χ telles que $\psi + \epsilon\chi \in G$ et qui satisfont (4.6). Du théorème 4.1, il existe une fonction F qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g} et telle que ses vecteurs tangents satisfont (4.8). Si nous définissons

$$\chi := \psi F,$$

en utilisant (4.8) la fonction χ satisfait (4.6). Puisque $F \in \mathfrak{g}$, la formule

$$\psi' = \psi + \epsilon\chi = \psi(1 + \epsilon F),$$

ce qui implique que $\psi' \in G$. Ainsi, nous avons construit une déformation infinitésimale de ψ . \square

Définissons [39]

$$\begin{aligned} A &= a(\lambda) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda} + (\partial_{x^1} S + [S, \mathcal{U}]) + \sum_{n=1}^m \frac{D\mathcal{U}}{D\theta^n} \Psi^n, \\ B &= a(\lambda) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda} + (\partial_{x^2} S + [S, \mathcal{V}]) + \sum_{n=1}^m \frac{D\mathcal{V}}{D\theta^n} \Psi^n, \end{aligned}$$

où $D/D\theta^n$ est la dérivée de Fréchet dans la direction de θ^n . Ψ^n représente l'ensemble des fonctions scalaires $\{\psi^n\}_1^r$ qui sont des symétries de l'équation (4.2). Les matrices $A, B \in \mathfrak{g}$ satisfont (4.5) et alors il existe une fonction F qui prend ses valeurs dans

\mathfrak{g} qui définit une surface bidimensionnelle si A et B sont linéairement indépendants. Dans [39], il propose une forme intégrée de cette surface

$$F = \psi^{-1} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + S\psi + \sum_{n=1}^m \frac{D\psi}{D\theta^n} \Psi^n \right).$$

Il a été démontré [49] que cette forme de surface est satisfaite si et seulement si $\{\psi^n\}$ est une symétrie généralisée du PLS (4.3) en addition au système intégrable d'EDP équivalent à (4.2).

L'objectif est d'avoir une meilleure compréhension de la formule d'immersion définie par les vecteurs tangents (4.8) en utilisant la structure des groupes de Lie des symétries généralisées, leur champ de vecteurs et leurs prolongations.

4.1.2 Symétrie généralisée et le problème linéaire spectral

L'équation (4.5) est une déformation infinitésimale de la CCN (4.2). Cette déformation peut être générée par trois choix possibles de symétries

1. La symétrie généralisée de la CCN traitée comme une EDP en variables matricielles $u^\alpha \in \mathfrak{g}$

$$\Delta^j[\theta] \equiv D_{x^2} u^{1,j} - D_{x^1} u^{2,j} + u^{1,k} u^{2,l} c_{kl}^j = 0.$$

2. La symétrie généralisée de l'EDP (4.5) $\Omega[\theta] = 0$ selon la variable dépendante θ .
3. La symétrie par rapport au problème spectral λ de l'équation

$$\Omega[\theta] \equiv D_{x^2} \mathcal{U}^2([\theta], \lambda) - D_{x^1} \mathcal{U}^1([\theta], \lambda) + [\mathcal{U}^1([\theta], \lambda), \mathcal{U}^2([\theta], \lambda)] = 0.$$

Jusqu'à maintenant, nous avons introduit deux types d'équations différentielles

$$\Delta^j[\theta] \equiv D_{x^2} u^{1,j} - D_{x^1} u^{2,j} + u^{1,k} u^{2,l} c_{kl}^j = 0,$$

$$\Omega[\theta] \equiv D_{x^2} \mathcal{U}^2([\theta], \lambda) - D_{x^1} \mathcal{U}^1([\theta], \lambda) + [\mathcal{U}^1([\theta], \lambda), \mathcal{U}^2([\theta], \lambda)] = 0.$$

Ces deux types d'équations différentielles sont équivalentes sous une paramétrisation de u^α en termes des variables indépendantes x^1, x^2, λ et des variables dépendantes θ^k ainsi que de leurs dérivées. Cette paramétrisation est obtenue par l'évaluation d'une application τ

$$\tau(u^\alpha) = \mathcal{U}^\alpha([\theta], \lambda) \in \mathfrak{g}, \quad \tau(u_j^\alpha) = \mathcal{U}_j^\alpha([\theta], \lambda) \in \mathfrak{g}, \quad (4.9)$$

où on a noté $[\theta] = (x^1, x^2, \theta^k, \theta_j^k) \in N$ où N est l'espace de Jet.

Proposition 4.1. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie avec une base e_j et les coefficients de structures c_{kl}^j . Supposons que*

$$u^\alpha = (u^{\alpha,j} e_j) \in \mathfrak{g}, \quad \alpha = 1, 2$$

sont des fonctions matricielles qui satisfont le système d'EDP

$$\Delta^j[u] \equiv D_2 u^{1,j} - D_1 u^{2,j} + u^{1,k} u^{2,l} c_{kl}^j = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (4.10)$$

et la fonction d'onde $\psi[u] \in G$ est une solution du PLS associé

$$D_\alpha \psi = u^\alpha \psi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.11)$$

Soit \vec{v} une champ vectoriel généralisé en termes des variables dépendantes $u^{\alpha,j}$ et des variables indépendantes $x^i = \{x^1, x^2, x^3 = \lambda\}$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \xi^i[u] \partial_{x^i} + \varphi^{\alpha,j}[u] \partial_{u^{\alpha,j}}$$

avec la forme d'évolution

$$\vec{v}_Q = Q^{\alpha,j}[u] \partial_{u^{\alpha,j}}, \quad Q^{\alpha,j}[u] = \varphi^{\alpha,j}[u] - \xi^i[u] u_i^{\alpha,j}.$$

Alors, les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) \vec{v}_Q est une symétrie généralisée de la représentation de courbure nulle $\Delta^j[u] = 0$.
- (ii) Il existe une fonction d'immersion $F[u]$ dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} avec les vecteurs tangents

$$D_\alpha F[u] = \psi^{-1} Q^\alpha[u] \psi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.12)$$

(iii) Il existe une fonction matricielle $\phi[u]$ telle que la déformation infinitésimale

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} Q^1[u] \\ Q^2[u] \\ \chi[u] \end{pmatrix}, \quad 0 < \epsilon \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

donne une symétrie généralisée infinitésimale du système (4.10) et de son PLS (4.11).

De plus, si (ii) est satisfait, alors $\chi = \psi F$ est une déformation infinitésimale de ϕ et si (iii) est satisfait, alors $F = \psi^{-1}\chi$ a des vecteurs tangents qui coïncident avec (4.12).

Preuve : Commençons avec l'équivalence entre (i) et (ii). Du critère d'invariance pour les symétries généralisées, nous savons que \vec{v}_Q est une symétrie généralisée de la représentation de courbure nulle si et seulement si

$$\text{pr}(\vec{v}_Q)\Delta = D_2Q^1 - D_1Q^2 + [Q^1, u^2] + [u^1, Q^2] = 0, \quad (4.14)$$

quand $\Delta = 0$. (Il est à noter que pour alléger la notation nous utiliserons la contraction $D_{x^\alpha} \equiv D_\alpha \cdot$)

La fonction d'immersion $F[u] \in \mathfrak{g}$ et les vecteurs tangents donnés par (4.12) vont exister si et seulement si la condition de compatibilité pour les vecteurs tangents est satisfaite. La condition de compatibilité pour (4.12) est exactement (4.14) et alors la fonction d'immersion F existe. Puisque les vecteurs tangents de F sont assumés comme des éléments de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , nous pouvons supposer que F est dans l'algèbre à une constante d'intégration près, donc (i) \Leftrightarrow (ii).

Pour montrer l'équivalence entre (ii) et (iii), nous devons nous rappeler que (ii) est satisfait si et seulement si l'équation (4.14) est aussi satisfaite. La déformation infinitésimale (4.13) est une symétrie du système d'EDP $\Delta[u] = 0$ si et seulement si (4.14) est satisfaite et alors (iii) \Rightarrow (ii). De plus, la déformation infinitésimale (4.13) est

aussi une symétrie du PLS (4.11) si et seulement si

$$D_1\chi = u^1\chi + Q^1\psi, \quad D_2\chi = u^2\chi + Q^2\psi. \quad (4.15)$$

Si nous définissons

$$\chi := \psi F,$$

alors

$$\psi^1 = \psi(1 + \epsilon F) \in G$$

et (4.15) est satisfait quand ψ est une solution du PLS (4.11). De plus, la fonction d'immersion F a les vecteurs tangents donnés par (4.12). Alors (ii) \Rightarrow (iii) et inversement, si (ii) est satisfait, alors

$$\chi = \psi F$$

est une symétrie admissible pour ψ .

Pour l'équivalence entre (iii) et (i), si (iii) est satisfait, alors χ satisfait les conditions (4.15) et les surfaces sont définies par

$$F = \psi^{-1}\chi$$

et ont des vecteurs tangents qui coïncident avec (4.12) pour lesquels la condition de compatibilité pour (4.12) est exactement l'équation (4.14). \square

Un champ vectoriel généralisé \vec{v}_Q est une symétrie de la représentation de courbure nulle $\Delta = 0$ si et seulement s'il existe une fonction d'immersion $F[u]$ qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g} avec les vecteurs tangents (4.12) qui sont équivalents à l'existence d'une symétrie généralisée infinitésimale de la représentation de courbure nulle et de son PLS (4.11).

4.1.3 Formule de Sym-Tafel pour les symétries conformes selon le paramètre spectral λ

Le système de la représentation de courbure nulle $\Omega[\theta] = 0$ est invariant sous une transformation conforme selon le paramètre spectral λ . Le champ de vecteurs associé à cette symétrie est

$$\vec{v} = -a(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \vec{v}_Q = a(\lambda) D_\lambda u^{\alpha,j} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha,j}}, \quad u^\alpha = u^{\alpha,j} e_j. \quad (4.16)$$

Le champ de vecteurs (4.16) génère une symétrie infinitésimale

$$\lambda' = \lambda - \epsilon a(\lambda) \quad \text{et} \quad (u^\alpha)' = u^\alpha + \epsilon D_\lambda u^\alpha, \quad (4.17)$$

alors, de la Proposition 4.1, il existe une fonction d'immersion $F([u], \lambda)$ qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g} avec ses vecteurs tangents donnés par

$$D_\alpha F^{ST}([u], \lambda) = a(\lambda) \psi^{-1} D_\lambda u^\alpha \psi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.18)$$

Ceci implique qu'il existe une déformation infinitésimale à la fois pour la représentation de courbure nulle $\Delta = 0$ et pour son PLS (4.11) de la forme

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{bmatrix} + \epsilon a(\lambda) \begin{bmatrix} D_\lambda u^1 \\ D_\lambda u^2 \\ D_\lambda \psi \end{bmatrix}.$$

La matrice χ définie comme $\chi := \phi F$ est donnée par

$$\chi = a(\lambda) D_\lambda \psi, \quad F = a(\lambda) \psi^{-1} D_\lambda \psi.$$

Les matrices A et B associées à la symétrie (4.17) sont données par

$$A^{ST} = a(\lambda) D_\lambda u^{1,j} e_j, \quad B^{ST} = a(\lambda) D_\lambda u^{2,j} e_j.$$

La fonction $F([u], \lambda)$ qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g} détermine l'immersion d'une surface bidimensionnelle dans \mathfrak{g} si les vecteurs tangents (4.18) sont linéairement indépendants.

La forme intégrée de la surface est donnée par la formule de Sym-Tafel

$$F^{ST} = a(\lambda) \psi^{-1} D_\lambda \psi \in \mathfrak{g}.$$

4.1.4 Transformation de jauge de la fonction d'onde

Le système de la représentation de courbure nulle $\Delta[u] = 0$ et son PLS

$$D_\alpha \psi = u^\alpha \psi, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.19)$$

sont invariants sous la transformation de jauge $S[u] \in \mathfrak{g}$

$$\psi' = \psi + \epsilon \chi, \quad \chi = S\psi, \quad (4.20)$$

associée à la transformation infinitésimale du système

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \psi \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} D_1 S + [S, u^1] \\ D_2 S + [S, u^2] \\ S\psi \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

qui est une symétrie du système de la représentation de la courbure nulle $\Delta = 0$ ainsi que pour son PLS (4.19).

Le champ de vecteurs qui génère cette symétrie infinitésimale écrite sous sa forme d'évolution est

$$\vec{v}_Q = (D_1 S^j + S^k u^{1,l} c_{kl}^j) \partial_{u^{1,j}} + (D_2 S^j + S^k u^{2,l} c_{kl}^j) \partial_{u^{2,j}}$$

et la fonction d'immersion qui prend ses valeurs dans \mathfrak{g}

$$F^S = \psi^{-1} \chi = \psi^{-1} S\psi$$

a les vecteurs tangents linéairement indépendants

$$D_\alpha F^S = \psi^{-1} (D_\alpha S + [S, u^\alpha]) \psi, \quad \alpha = 1, 2.$$

Cela est consistant avec les vecteurs tangents donnés par

$$D_\alpha F = \psi^{-1} Q^\alpha[u] \psi, \quad \alpha = 1, 2.$$

4.1.5 Symétries généralisées de la représentation de courbure nulle

La représentation de courbure nulle est équivalente au système d'EDP selon les variables dépendantes θ^k

$$\Omega[\theta] = D_2\mathcal{U}^1([\theta], \lambda) - D_1\mathcal{U}^2([\theta], \lambda) + [\mathcal{U}^1([\theta], \lambda), \mathcal{U}^2([\theta], \lambda)] = 0.$$

Le PLS

$$D_\alpha\phi([\theta], \lambda) = \mathcal{U}^\alpha([\theta], \lambda)\phi([\theta], \lambda), \quad \alpha = 1, 2,$$

où nous définissons $[\theta] = (x^1, x^2, \theta^k, \theta_j^k)$ dans l'espace de Jet N tel que la dérivée totale est donnée par

$$D_\alpha = \partial_{x^\alpha} + \theta_{j,\alpha}^k \partial_{\theta_j^k}, \quad k = 1, \dots, l$$

et le champ vectoriel généralisé et sa forme d'évolution sont donnés par

$$\begin{aligned} \omega &= \xi^i[\theta] \partial_{x^i} + \varphi^k[\theta] \partial_{\theta^k}, \\ \omega_R &= R^k[\theta] \partial_{\theta^k}, \quad R^k[\theta] = \psi^\alpha[\theta] - \xi^i[\theta] \theta_i^\alpha. \end{aligned}$$

La prolongation de ω_R est donc

$$\text{pr}\omega_R = \omega_R + D_J R^k[\theta] \partial_{\theta_j^k}.$$

Le champ de vecteurs généralisé ω_R induit une déformation infinitésimale de la fonction θ^k par

$$(\theta^k)' = \theta^k + \epsilon R^k[\theta]$$

et donc induit une déformation infinitésimale des matrices \mathcal{U}^α

$$(\mathcal{U}^\alpha)' = \mathcal{U}^\alpha + \epsilon \text{pr}\omega_R \mathcal{U}^\alpha([\theta], \lambda).$$

Proposition 4.2. *Supposons qu'il existe un système intégrable d'EDP sous la forme de la représentation de courbure nulle*

$$\Delta([\theta], \lambda) = D_1\mathcal{U}^2 - D_2\mathcal{U}^1 + [\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2] = 0 \quad (4.22)$$

qui est indépendant de λ et est la condition de compatibilité du PLS

$$D_\alpha \phi = \mathcal{U}^\alpha \phi, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.23)$$

pour les fonctions matricielles $\phi = \phi([\theta], \lambda) \in G$.

Considérons un champ de vecteur généralisé ω sous sa forme d'évolution

$$\omega_R = R^k[\theta] \partial_{\theta^k}.$$

Alors, les énoncés suivants sont équivalents

(i) Le champ de vecteur ω_R est une symétrie généralisée du système intégrable de EDP (4.22) ;

(ii) Il existe une fonction d'immersion $F = F([\theta], \lambda)$ d'une surface dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} avec les vecteurs tangents

$$D_\alpha F([\theta], \lambda) = \phi^{-1} (pr \omega_R \mathcal{U}^\alpha) \phi, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.24)$$

où les termes $pr \omega_R \mathcal{U}^\alpha$ sont linéairement indépendants ;

(iii) Il existe une fonction matricielle χ telle que la déformation infinitésimale

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}^1 \\ \mathcal{U}^2 \\ \phi \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathcal{U}^1 \\ \mathcal{U}^2 \\ \phi \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} pr \omega_R \mathcal{U}^1 \\ pr \omega_R \mathcal{U}^2 \\ \chi \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

donne une symétrie généralisée infinitésimale du système intégrable (4.22) et de son PLS (4.23).

De plus, si l'énoncé (ii) est satisfait, alors

$$\chi = \phi F$$

est une déformation infinitésimale admissible de ϕ et si l'énoncé (iii) est satisfait, alors la fonction d'immersion

$$F = \phi^{-1} \chi = \phi^{-1} (pr \omega_R \phi) \quad (4.26)$$

a des vecteurs tangents qui sont consistants (4.24).

Preuve : Pour cette preuve, nous utilisons la Proposition 4.1 démontrant que l'énoncé (ii) est équivalent à l'énoncé (iii), alors il reste à montrer que l'énoncé (i) est équivalent à l'énoncé (ii).

À partir du critère d'invariance pour les symétries généralisées [78], le champ de vecteurs généralisé ω_R est une symétrie généralisée de (4.22) si et seulement si

$$\begin{aligned} \text{pr}\omega_R\Omega &= \text{pr}\omega_R(D_2\mathcal{U}^1) - \text{pr}\omega_R(D_1\mathcal{U}^2) + [\text{pr}\omega_R\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2] + [\mathcal{U}^1, \text{pr}\omega_R\mathcal{U}^2] = 0, \\ \text{modulo } \Omega &= D_1\mathcal{U}^2 - D_2\mathcal{U}^1 + [\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'autre part, la condition de compatibilité pour les vecteurs tangents (4.24) est

$$D_2(\text{pr}\omega_R\mathcal{U}^1) - D_1(\text{pr}\omega_R\mathcal{U}^2) + [\text{pr}\omega_R\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2] + [\mathcal{U}^1, \text{pr}\omega_R\mathcal{U}^2] = 0. \quad (4.28)$$

Comme il est démontré dans le Lemme 5.12 de [78, p.300].

$$[\text{pr}\omega_R, D_\alpha] = 0 \quad (4.29)$$

et donc (4.27) est équivalent à (4.28).

Alors, si ω_R est une symétrie généralisée de (4.22), les équations de compatibilité pour (4.24) sont satisfaites et la fonction matricielle F existe et, à une constante d'intégration près, peut être assumée dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

À l'inverse, si une fonction d'immersion F existe, alors (4.27) est satisfait et ω_R est une symétrie généralisée de (4.22). \square

Nous avons formulé quelques conditions sur les champs de vecteurs généralisés ω_R qui permettent l'intégration de la fonction d'immersion $F([\theta], \lambda)$ qui prend ses valeurs dans l'algèbre \mathfrak{g} . Aussi, nous avons montré que si le champ de vecteurs généralisés ω_R est une symétrie à la fois du système intégrable et de son PLS, alors la fonction d'immersion peut être intégrée explicitement.

4.2 Équation de Sine-Gordon

L'équation de Sine-Gordon, quoique très célèbre en mathématiques pour ses surfaces pseudo-sphériques, apparait aussi dans une multitude de domaines en physique [84], par exemple dans la théorie des particules élémentaires, dans la résonance magnétique nucléaire, dans la théorie de dislocation de cristal, la propagation du flux quantifié pour les jonctions de Josephson, la propagation d'ondes ébrasées le long de membranes de lipide ainsi que dans l'analyse des modes mécaniques de propagation d'ondes non-linéaires, pour n'en nommer que quelques uns.

Ici, l'équation de Sine-Gordon n'est donnée qu'à titre d'exemple puisqu'elle est déjà très bien connue dans la littérature. Soit l'équation de Sine-Gordon

$$\theta_{xt} = \sin \theta \quad \text{et son PLS} \quad D_x \phi = U \phi, \quad D_t \phi = V \phi,$$

où les matrices U et V appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ et sont définies de la façon suivante

$$U = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \lambda & -\theta_x \\ -\theta_x & -\lambda \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \in \mathfrak{su}(2)$$

avec les propriétés de cette algèbre, $\text{tr}(\mathfrak{g}) = 0$ et $\mathfrak{g}^\dagger = -\mathfrak{g}$, où \mathfrak{g} représente tous les éléments de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$.

4.2.1 Formule d'immersion de Sym-Tafel

Dans le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous avons les vecteurs tangents

$$\begin{aligned} D_x F^{ST} &= \phi^{-1}(D_\lambda U) \phi, \\ D_t F^{ST} &= \phi^{-1}(D_\lambda V) \phi, \end{aligned}$$

où

$$A^{ST} = D_\lambda U = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{ST} = D_\lambda V = \frac{-1}{2\lambda^2} \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \in \mathfrak{su}(2)$$

et A et B sont linéairement indépendants.

Nous pouvons vérifier que U et V satisfont le PLS grâce à l'équation suivante

$$U_t - V_x + [U, V] = 0,$$

qui est la condition de courbure nulle (CCN) qui est équivalente à l'équation de départ.

Pour les matrices dérivées, nous trouvons facilement que

$$U_t = -\frac{i\theta_{xt}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_x = \frac{\theta_x}{2\lambda} \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Pour ce qui est du commutateur, nous avons

$$\begin{aligned} UV &= \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & -\theta_x \\ -\theta_x & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \cos \theta \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4\lambda} \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta + i\theta_x \sin \theta & i\lambda \sin \theta + \theta_x \cos \theta \\ -\theta_x \cos \theta + i\lambda \sin \theta & -i\theta_x \sin \theta + \lambda \cos \theta \end{bmatrix}, \\ VU &= \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & -\theta_x \\ -\theta_x & -\lambda \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4\lambda} \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta - i\theta_x \sin \theta & -i\lambda \sin \theta - \theta_x \cos \theta \\ \theta_x \cos \theta - i\lambda \sin \theta & i\theta_x \sin \theta + \lambda \cos \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et donc, le commutateur est

$$[U, V] = \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} i\theta_x \sin \theta & i\lambda \sin \theta + \theta_x \cos \theta \\ i\lambda \sin \theta - \theta_x \cos \theta & -i\theta_x \sin \theta \end{bmatrix}.$$

De là, en combinant ces trois termes, nous obtenons les deux équations suivantes

$$\frac{i\theta_x}{2\lambda} \sin \theta - \frac{i\theta_x}{2\lambda} \sin \theta \equiv 0$$

et

$$-\frac{i\theta_{xt}}{2} - \frac{\theta_x}{2\lambda} \cos \theta + \frac{i}{2} \sin \theta + \frac{\theta_x}{2\lambda} \cos \theta = 0,$$

$$\frac{-i}{2}(\theta_{xt} - \sin \theta) = 0, \quad \text{quand} \quad \theta_{xt} = \sin \theta.$$

Il est nécessaire de calculer la première forme fondamentale pour obtenir les courbes de l'équation de Sine-Gordon, c'est-à-dire

$$I = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdt + g_{22}dt^2.$$

Ici, nous avons que

$$E = g_{11} = -\frac{1}{2}\text{tr}(A^{ST})^2, \quad F = g_{12} = -\frac{1}{2}\text{tr}(A^{ST}B^{ST}), \quad G = g_{22} = -\frac{1}{2}\text{tr}(B^{ST})^2,$$

et nous pouvons trouver que

$$E = -\frac{1}{2}\text{tr} \left(-\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4}, \quad F = -\frac{1}{2}\text{tr} \left(\frac{-i}{4\lambda^2} \begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \cos \theta \end{bmatrix} \right) = \frac{\cos \theta}{4\lambda^2},$$

$$G = -\frac{1}{2}\text{tr} \left(\frac{1}{4\lambda^4} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4\lambda^4}.$$

De là, nous avons notre première forme fondamentale qui est

$$I = \frac{1}{4}dx^2 + \frac{\cos \theta}{2\lambda^2}dxdt + \frac{1}{4\lambda^4}dt^2.$$

Il est aussi nécessaire de calculer la deuxième forme fondamentale, mais pour ce faire, nous devons déterminer la forme du vecteur perpendiculaire à la surface, où ce vecteur N^{ST} est défini comme suit

$$N^{ST} = \phi^{-1} \frac{[A^{ST}, B^{ST}]}{\sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}([A^{ST}, B^{ST}]^2)}} \phi = \phi^{-1} \frac{[A^{ST}, B^{ST}]}{\|[A^{ST}, B^{ST}]\|} \phi.$$

Puisque nous connaissons A^{ST} et B^{ST} , il est simple de trouver ce vecteur perpendiculaire. Tout d'abord, nous avons pour le commutateur

$$[A^{ST}, B^{ST}] = \frac{-i}{4\lambda^2} \left(\begin{bmatrix} -i \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -i \cos \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -i \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -i \cos \theta \end{bmatrix} \right) = \frac{-i}{2\lambda} \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donc

$$[A^{ST}, B^{ST}]^2 = \frac{-1}{4\lambda^4} \sin^2 \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le dénominateur $||[A^{ST}, B^{ST}]||$ dans l'équation de N^{ST} est appelé la norme du commutateur $[A^{ST}, B^{ST}]$ et est égal à

$$||[A^{ST}, B^{ST}]|| = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{8\lambda^4}} = \frac{\sin \theta}{2\lambda^2}.$$

Si nous définissons la base de $\mathfrak{su}(2)$ de la façon suivante,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

ceci fait en sorte que notre vecteur perpendiculaire est

$$N^{ST} = \phi^{-1} e_1 \phi.$$

Maintenant que nous avons notre N^{ST} , nous pouvons déterminer la deuxième forme fondamentale qui est

$$II = e dx^2 + 2f dx dt + g dt^2$$

avec

$$e = -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_x^2 F^{ST}), \quad f = -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_{xt} F^{ST}), \quad g = -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_t^2 F^{ST}).$$

Pour e , nous avons

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_x(\phi^{-1} A^{ST} \phi)), \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\phi N \phi^{-1} (A_x^{ST} + [A^{ST}, U])), \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} \lambda & -\theta_x \\ \theta_x & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \theta_x \\ -\theta_x & \lambda \end{bmatrix} \right) \right) \right), \\ &= \frac{1}{8} \text{tr} \left(2 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x \\ \theta_x & 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \end{aligned}$$

Pour f , nous avons

$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_t(\phi^{-1}A^{ST}\phi)), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\phi N\phi^{-1}(A_t^{ST} + [A, V])), \\
 &= -\frac{i}{8\lambda}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -i\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & i\cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & i\cos\theta \end{bmatrix}\right)\right), \\
 &= -\frac{\sin\theta}{2\lambda}.
 \end{aligned}$$

Finalement pour g , nous avons

$$\begin{aligned}
 g &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_t(\phi^{-1}B^{ST}\phi)), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\phi N\phi^{-1}(B_t^{ST} + [B^{ST}, V])), \\
 &= \frac{i}{2}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{\theta_t}{2\lambda^2}\begin{bmatrix} i\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix} - \frac{1}{4\lambda^3}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\right)\right), \\
 &= -\frac{i\theta_t}{4\lambda^2}\text{tr}\begin{pmatrix} -\cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons donc la deuxième forme fondamentale qui s'écrit de la façon suivante

$$\text{II} = -\frac{\sin\theta}{\lambda}dxdt.$$

En ayant la première et la deuxième formes fondamentales, nous pouvons maintenant calculer la courbure de Gauss K^{ST} et la courbure moyenne H^{ST} . Soit

$$\begin{aligned}
 K^{ST} &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\
 &= \frac{-(4\lambda^2)^{-1}\sin^2\theta}{(16\lambda^4)^{-1} - (16\lambda^4)^{-1}\cos^2\theta} = \frac{-(4\lambda^2)^{-1}\sin^2\theta}{(16\lambda^4)^{-1}\sin^2\theta} = -4\lambda^2, \\
 H^{ST} &= \frac{Eg + eG - 2fF}{2(EG - F^2)}, \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^{-1}\sin\theta \cdot (4\lambda^2)^{-1}\cos\theta}{(16\lambda^4)^{-1}\sin^2\theta} = 2\lambda \cot\theta.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que la courbure de Gauss K^{ST} représente la courbure d'une pseudo-sphère, mais que la courbure moyenne H^{ST} n'est pas constante. Nous pouvons

identifier où sont les points umbiliques au moyen de l'équation

$$(H^{ST})^2 - K^{ST} = 0.$$

En remplaçant et en simplifiant, nous obtenons

$$\frac{4\lambda^2}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Les seuls moments où cette équation est satisfaite, c'est lorsque $\lambda = 0$ ou $\theta = \pm i\infty$.

Il n'y a donc pas de point umbilique sur cette surface.

4.2.2 Symétries généralisées

Nous pouvons aussi trouver les courbures pour le cas des symétries généralisées. Commençons par définir $\vec{\omega}_R$, les symétries généralisées de notre équation de départ,

$$\vec{\omega}_R = R[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta},$$

où R dépend de x, t, θ et de toutes les dérivées de θ . Nous déterminons la prolongation comme suit

$$\text{pr}(\vec{\omega}_R) = R[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta} + D_x R[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta_x} + D_t R[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta_t} + D_{xt} R[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} + \dots$$

Pour que $\vec{\omega}_R$ soit une symétrie généralisée de notre équation de départ, elle doit obéir à

$$\text{pr}(\vec{\omega}_R) \Delta = 0, \quad \text{quand} \quad \Delta = \theta_{xt} - \sin \theta = 0.$$

En appliquant la prolongation exprimée précédemment sur notre équation de départ, nous obtenons l'équation déterminante

$$D_{xt} R[\theta] - R[\theta] \cos \theta = 0. \tag{4.30}$$

Nous pouvons facilement voir que si $R[\theta]$ est égale à θ_x ou θ_t , l'équation déterminante est vraie

$$R := \theta_t \longrightarrow D_x D_t^2 \theta - D_t \theta \cos \theta = D_t (\theta_{xt} - \sin \theta) = 0,$$

$$R := \theta_x \longrightarrow D_x^2 D_t \theta - D_x \theta \cos \theta = D_x (\theta_{xt} - \sin \theta) = 0,$$

modulo l'équation de départ. Nous pouvons voir que ces deux symétries représentent des translations en x et en t ,

$$\omega_R = \theta_x \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Si nous gardons R général, nous pouvons définir les vecteurs tangents de la façon suivante

$$D_x F = \phi^{-1} A \phi, \quad D_t F = \phi^{-1} B \phi,$$

où A et B sont linéairement indépendants,

$$A = \text{pr}(\vec{\omega}_R)U = \frac{-iR_x}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \text{pr}(\vec{\omega}_R)V = \frac{R}{2\lambda} \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

De là, nous pouvons calculer la première forme fondamentale

$$E = -\frac{1}{2} \text{tr}(A^2) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{-R_x^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{R_x^2}{4},$$

$$F = -\frac{1}{2} \text{tr}(AB) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{-iRR_x}{4\lambda} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$G = -\frac{1}{2} \text{tr}(B^2) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{R^2}{4\lambda^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{R^2}{4\lambda^2}.$$

Donc, nous avons

$$I = \frac{R_x^2}{4} dx^2 + \frac{R^2}{4\lambda^2} dt^2.$$

Pour calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale, nous devons tout

d'abord calculer le vecteur perpendiculaire.

$$\begin{aligned}
 [A, B] &= \frac{-iRR_x}{4\lambda} \left(\begin{bmatrix} -\cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ -i \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \right), \\
 &= \frac{-iRR_x}{2\lambda} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \\
 [A, B]^2 &= \frac{-R^2 R_x^2}{4\lambda^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 ||[A, B]|| &= \sqrt{\frac{R^2 R_x^2}{4\lambda^2}}.
 \end{aligned}$$

Nous aurons donc que

$$N = \phi^{-1} \frac{[A, B]}{[-\frac{1}{2}\text{tr}([A, B]^2)]^{1/2}} \phi = \phi^{-1} \begin{bmatrix} i \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \cos \theta \end{bmatrix} \phi.$$

Nous pouvons maintenant calculer la deuxième forme fondamentale. Pour e , nous avons

$$\begin{aligned}
 e &= -\frac{1}{2} \text{tr}(ND_x(\phi^{-1}A\phi)), \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\phi N \phi^{-1}(A_x + [A, U])), \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\phi N \phi^{-1} \left(-\frac{iR_{xx}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{R_x}{4} \left(\begin{bmatrix} -\theta_x & -\lambda \\ \lambda & -\theta_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\theta_x & \lambda \\ -\lambda & -\theta_x \end{bmatrix} \right) \right) \right), \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} i \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{-iR_{xx}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\lambda R_x}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right), \\
 &= \frac{\lambda R_x}{4} \text{tr} \begin{pmatrix} \sin \theta & i \cos \theta \\ i \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{R_x \lambda \sin \theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Pour f , nous avons

$$\begin{aligned}
 f &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_t(\phi^{-1}A\phi)), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\phi N\phi^{-1}(A_t + [A, V])), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}\left(\phi N\phi^{-1}\left(-\frac{iR_{xt}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{R_x}{4\lambda}\left(\begin{bmatrix} -\sin\theta & i\cos\theta \\ -i\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin\theta & -i\cos\theta \\ i\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\right)\right)\right), \\
 &= \frac{iR_x}{4\lambda}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} i\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta & i\cos\theta \\ -i\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

Pour g , nous avons

$$\begin{aligned}
 g &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_t(\phi^{-1}B\phi)), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\phi N\phi^{-1}(B_t + [B, V])), \\
 &= -\frac{1}{2}\text{tr}\left(\phi N\phi^{-1}\left(\frac{R_t}{2\lambda}\begin{bmatrix} i\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix} + \frac{R\theta_t}{2\lambda}\begin{bmatrix} i\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\cos\theta \end{bmatrix} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{R}{4\lambda^2}\left(\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right), \\
 &= -\frac{R\theta_t}{4\lambda}\text{tr}\left(\begin{bmatrix} i\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\cos\theta \end{bmatrix}\right), \\
 &= -\frac{R\theta_t}{4\lambda}\text{tr}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{R\theta_t}{2\lambda}.
 \end{aligned}$$

Ceci fait en sorte que la deuxième forme fondamentale est donnée par

$$\text{II} = \frac{R_x\lambda\sin\theta}{2}dx^2 + \frac{R\theta_t}{2\lambda}dt^2.$$

Maintenant que nous avons déterminé tous les coefficients de la première et deuxième formes fondamentales, nous pouvons calculer la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H ,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \left(\frac{RR_x\theta_t\lambda\sin\theta}{4\lambda}\right)\left(\frac{16\lambda^2}{R^2R_x^2}\right) = \frac{4\lambda^2\theta_t\sin\theta}{RR_x},$$

$$H = \frac{Eg + eG - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_x^2 R \theta_t}{8\lambda} - \frac{R^2 R_x^2 \sin \theta}{8\lambda^2} \right) \left(\frac{16\lambda^2}{R^2 R_x^2} \right) = \lambda \left(\frac{\theta_t}{R} + \frac{\sin \theta}{R_x} \right).$$

Les points umbiliques sont donnés par l'équation

$$H^2 - K = 0,$$

ce qui nous donne

$$\frac{\sin^2 \theta}{R_x^2} + \frac{\theta_t^2}{R^2} - 2 \frac{\sin \theta}{R_x R} = \left(\frac{\sin \theta}{R_x} - \frac{\theta_t}{R} \right)^2 = 0.$$

Pour le cas $R = \theta_t$, nous pouvons simplifier ces résultats pour obtenir

$$K = \frac{4\lambda^2 \theta_t \sin \theta}{\theta_t \theta_{xt}} = 4\lambda^2,$$

$$H = \lambda \left(\frac{\theta_t}{\theta_t} + \frac{\sin \theta}{\theta_{xt}} \right) = 2\lambda,$$

où la courbure de Gauss représente une sphère et où la courbure moyenne est constante.

L'équation des points umbiliques

$$H^2 - K = 0$$

est identiquement satisfaite

$$(2\lambda)^2 - 4\lambda^2 \equiv 0,$$

ce qui exprime qu'il n'y a aucun point umbilique sur cette surface.

Par contre, en utilisant la symétrie ponctuelle de translation en x , soit $R[\theta] = \theta_x$, nous obtenons respectivement la courbure de Gauss et la courbure moyenne

$$K = 4\lambda^2 \frac{\theta_t \theta_{xt}}{\theta_x \theta_{xx}}, \quad H = \lambda \left(\frac{\theta_{xt}}{\theta_{xx}} + \frac{\theta_t}{\theta_x} \right).$$

En utilisant l'équation des points umbiliques, nous obtenons

$$\frac{\theta_{xx}}{\theta_x} - \frac{\theta_{xt}}{\theta_t} = 0.$$

Si nous effectuons le changement de variables $u = \theta_x$ et $v = \theta_t$, nous obtenons l'équation

$$\frac{u_x}{u} - \frac{v_x}{v} = 0,$$

et nous pouvons intégrer pour avoir

$$\ln c + \ln u = \ln v \quad \implies cu = v$$

et donc

$$\theta_t = c\theta_x.$$

Nous pouvons facilement voir que

$$\theta(x, t) = g(ct + x),$$

où g est une fonction arbitraire. Lorsque c'est le cas, il y a présence de points umbiliques sur la surface.

D'un point de vue plus général, nous avons la présence de points umbiliques lorsque

$$\frac{\theta_{xt}}{\theta_t} = \frac{D_x R}{R}.$$

En effectuant le même changement de variable $v = \theta_t$, nous avons l'équation

$$\frac{D_x v}{v} = \frac{D_x R}{R},$$

où nous pouvons intégrer de sorte que

$$\theta_t = c(t)R,$$

$c(t)$ étant une fonction arbitraire. Nous avons donc que

$$R = \frac{\theta_t}{c(t)}.$$

En substituant ce résultat dans l'équation déterminante, nous avons

$$D_{xt} \left(\frac{\theta_t}{c(t)} \right) - \cos \theta \left(\frac{\theta_t}{c(t)} \right) = 0,$$

$$\frac{\theta_{xtt}}{c(t)} - \frac{\theta_{xt}c'(t)}{(c(t))^2} - \frac{\theta_{xtt}}{c(t)} = 0, \quad \text{modulo } \theta_{xtt} - \cos \theta \theta_t = D_t(\theta_{xt} - \sin \theta) = 0,$$

$$c'(t) = 0,$$

ce qui force la fonction $c(t)$ à être constante. Finalement, pour avoir des points umbiliques, θ doit satisfaire la relation

$$\theta_t = cR.$$

Il est intéressant de comparer les formes fondamentales de Sym-Tafel et des symétries généralisées.

	Sym-Tafel	Symétrie généralisé
I	$\frac{1}{4}dx^2 + \frac{\cos \theta}{2\lambda^2}dxd t + \frac{1}{4\lambda^4}dt^2$	$\frac{R_x^2}{4}dx^2 + \frac{R^2}{4\lambda^2}dt^2$
II	$-\frac{\sin \theta}{\lambda}dxd t$	$\frac{R_x \lambda \sin \theta}{2}dx^2 + \frac{R\theta_t}{2\lambda}dt^2$

TABLEAU 4.1 – Comparaison entre les formes fondamentales provenant de la formule d'immersion de Sym-Tafel et des symétries généralisées.

Nous pouvons voir que pour le cas de Sym-Tafel, les termes croisés dépendent de θ tandis que les deux autres termes sont soit nuls ou constants. Dans le cas des symétries généralisées, les termes croisés sont nuls tandis que les deux autres termes dépendent de $R[\theta]$.

Si on se réfère à l'article [39], nous avons un opérateur Ω qui nous permet d'obtenir des symétries généralisées non-triviales pour l'équation de Sine-Gordon

$$R_n = \Omega^n \theta_x, \quad \Omega := \partial_x^2 + \theta_x^2 - \theta_x \partial_x^{-1} \theta_{xx}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où ∂_x^{-1} est l'inverse de l'application dérivée,

$$\partial_x^{-1} f_x = f,$$

et tel qu'il est possible d'échanger la variable x par t pour obtenir un opérateur de

réurrence similaire. Pour le cas $n = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} R_1 &= [\partial_x^2 + \theta_x^2 - \theta_x \partial_x^{-1} \theta_{xx}] \theta_x, \\ &= \partial_x^2 \theta_x + \theta_x^3 - \theta_x \partial_x^{-1} [\theta_{xx} \theta_x], \\ &= \theta_{3x} + \theta_x^3 - \theta_x \left(\frac{1}{2} \partial_x^{-1} [\theta_x^2]_x \right), \\ &= \theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3. \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement vérifier que cette symétrie vérifie l'équation déterminante (4.30). D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} R_1 &= \theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3, \\ R_{1,xt} &= \theta_{4xt} + 3 \sin \theta \theta_x \theta_{xx} + \frac{3}{2} \theta_x^2 \theta_{xxt}, \\ R_{1,xt} - \cos \theta R &= \theta_{4xt} + 3 \sin \theta \theta_x \theta_{xx} + \frac{3}{2} \theta_x^2 \theta_{xxt} - \left(\theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3 \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De l'autre, nous avons

$$\begin{aligned} \theta_{xt} - \sin \theta &= 0, \\ D_x (\theta_{xt} - \sin \theta) &= \theta_{xxt} - \cos \theta \theta_x = 0, \\ D_x^3 (\theta_{xt} - \sin \theta) &= \theta_{4xt} + 3 \sin \theta \theta_x \theta_{xx} + (\theta_x^3 - \theta_{3x}) \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

En remplaçant ces résultats dans l'équation (4.31), nous pouvons voir aisément que R_1 respecte l'équation déterminante (4.30). Nous pouvons faire de la même façon la vérification pour R_2 ,

$$\begin{aligned} R_2 &= \Omega^2 \theta_x = [\partial_x^2 + \theta_x^2 - \theta_x \partial_x^{-1} \theta_{xx}]^2 \theta_x = [\partial_x^2 + \theta_x^2 - \theta_x \partial_x^{-1} \theta_{xx}] \left(\theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3 \right), \\ &= \theta_{5x} + \frac{5}{2} \theta_x \theta_{xx}^2 + \frac{5}{2} \theta_x^2 \theta_{3x} + \frac{3}{8} \theta_x^5, \end{aligned}$$

où

$$R_{2,xt} = \left(\frac{\theta_{5x}}{\theta_x} + \frac{5}{2} \theta_x \theta_{3x} + \frac{5}{2} \theta_{xx}^2 + \frac{3}{8} \theta_x^4 \right) \theta_{xxt}, \quad \text{modulo } D_x^k (\theta_{xt} - \sin \theta) = 0,$$

et $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et où D_x^k représente la dérivée totale appliquée k fois. Au niveau des courbures, nous obtenons pour le premier ordre

$$K_1 = \frac{4\lambda^2 \theta_l \sin \theta}{(\theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3)(\theta_{4x} + \frac{3}{2} \theta_x^2 \theta_{xx})}, \quad H_1 = \lambda \left(\frac{\theta_l}{\theta_{3x} + \frac{1}{2} \theta_x^3} + \frac{\sin \theta}{\theta_{4x} + \frac{3}{2} \theta_x^2 \theta_{xx}} \right),$$

et pour le deuxième ordre

$$K_2 = \frac{4\lambda^2\theta_t \sin \theta}{(\theta_{5x} + \frac{5}{2}\theta_x\theta_{xx}^2 + \frac{5}{2}\theta_x^2\theta_{3x} + \frac{3}{8}\theta_x^5)(\theta_{6x} + \frac{5}{2}\theta_{xx}^3 + 10\theta_x\theta_{xx}\theta_{3x} + \frac{5}{2}\theta_x^2\theta_{4x} + \frac{15}{8}\theta_x^4\theta_{xx})},$$

$$H_2 = \lambda \left(\frac{\theta_t}{\theta_{5x} + \frac{5}{2}\theta_x\theta_{xx}^2 + \frac{5}{2}\theta_x^2\theta_{3x} + \frac{3}{8}\theta_x^5} + \frac{\sin \theta}{\theta_{6x} + \frac{5}{2}\theta_{xx}^3 + 10\theta_x\theta_{xx}\theta_{3x} + \frac{5}{2}\theta_x^2\theta_{4x} + \frac{15}{8}\theta_x^4\theta_{xx}} \right).$$

Certaines quantités géométriques apparaissent pour les solutions dans la théorie des surfaces et dans la théorie des solitons. Pour toutes surfaces compactes connexes orientées avec le même caractère de Euler-Poincaré

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \sqrt{g} K dx dt, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Pour l'équation de Sine-Gordon, nous avons

$$\chi = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Omega} \theta_t \sin \theta dx dt = 2,$$

donc sont des ovaloïdes homomorphes à des sphères. Une autre quantité intéressante est la fonctionnelle de Willmore

$$W = \iint_{\Omega} \sqrt{g} H^2 dx dt.$$

Si $\theta, \theta_x, \theta_t$ tendent vers 0 quand x tend vers plus ou moins l'infini, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g} K dx = 0,$$

qui est le cas pour les solitons.

4.3 Équation de Sinh-Gordon

Partons, pour commencer, avec l'équation de Sine-Gordon,

$$\Delta = \theta_{xt} - \sin \theta = 0.$$

En effectuant le simple changement de variable $\theta = i\omega$, nous obtenons

$$\Delta = \omega_{xt} - \sinh \omega = 0,$$

qui est l'équation de Sinh-Gordon. Nous avons le PLS donné par

$$\begin{aligned}\phi_x &= U\phi = \left(\frac{i}{2}\lambda e_3 + \frac{\omega_x}{2}e_1 \right) \phi, \\ \phi_t &= V\phi = \frac{-i}{2\lambda} (\sinh \omega e_2 + \cosh \omega e_3) \phi,\end{aligned}$$

où la base e_i est donnée par

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le PLS respecte la représentation de courbure nulle (RCN)

$$U_t - V_x + [U, V] = (\omega_{xt} - \sinh \omega)e_1 = 0.$$

4.3.1 Formule d'immersion de Sym-Tafel

Pour le cas de la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous avons les matrices A et B

$$A = \partial_\lambda U = \frac{i}{2}e_3, \quad B = \partial_\lambda V = \frac{i}{2\lambda^2}(\sinh \omega e_2 + \cosh \omega e_3).$$

À partir d'ici, nous pouvons trouver la première forme fondamentale,

$$\mathbf{I} = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2,$$

de la façon suivante

$$\begin{aligned}E &= -\frac{1}{2}\text{tr}(A^2) = \frac{1}{4}, \\ F &= -\frac{1}{2}\text{tr}(AB) = \frac{\cosh \omega}{4\lambda^2}, \\ G &= -\frac{1}{2}\text{tr}(B^2) = \frac{1}{4\lambda^4},\end{aligned}$$

ce qui fait

$$I = \frac{1}{4}dx^2 + \frac{\cosh \omega}{2\lambda^2}dxdt + \frac{1}{4\lambda^4}dt^2.$$

En cherchant le vecteur normal de la même façon que pour Sine-Gordon, nous obtenons

$$\phi N \phi^{-1} = -ie_1,$$

ce qui nous permet d'obtenir maintenant la deuxième forme fondamentale

$$II = edx^2 + 2fdxdt + gdt^2,$$

où les coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_x^2F) = 0, \\ f &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_tD_xF) = \frac{-i}{2\lambda}\sinh\omega, \\ g &= -\frac{1}{2}\text{tr}(ND_t^2F) = 0, \end{aligned}$$

ce qui fait

$$II = -\frac{i}{\lambda}\sinh\omega dxdt.$$

Maintenant que nous avons la première forme et la deuxième forme fondamentales, il est possible de calculer les courbures de Gauss et moyenne, soit respectivement

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -4\lambda^2, \\ H &= \frac{eG + Eg - 2fF}{2(EG - F^2)} = -2i\lambda \coth \omega. \end{aligned}$$

En observant l'équation des points umbiliques,

$$H^2 - K = \frac{\lambda^2}{\sinh^2 \omega} = 0,$$

nous pouvons observer qu'il peut y avoir des points umbiliques uniquement si $\lambda = 0$ ou si $\omega = \pm\infty$. Il n'y a donc aucun point umbilique sur cette surface.

4.3.2 Symétries généralisées

Pour cette équation, les symétries généralisées sont données par l'équation déterminante

$$D_x D_t R - R \cosh \omega = 0,$$

où R est la symétrie généralisée, telle que le champ vectoriel est défini ainsi

$$v_R = R[\omega] \frac{\partial}{\partial \omega}.$$

En appliquant la prolongation du champ vectoriel sur les matrices potentielles du PLS, on obtient les matrices A et B , soit

$$A = \frac{D_x R}{2} e_1, \quad B = -\frac{iR}{2\lambda} (\cosh \omega e_2 + \sinh \omega e_3).$$

En appliquant le même procédé pour obtenir la première forme fondamentale que pour l'équation de Sine-Gordon, nous obtenons les coefficients suivants

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \text{tr}(A^2) = -\frac{(D_x R)^2}{4}, \\ F &= -\frac{1}{2} \text{tr}(AB) = 0, \\ G &= -\frac{1}{2} \text{tr}(B^2) = -\frac{R^2}{4\lambda^2}, \end{aligned}$$

et donc, la première forme fondamentale est donnée par

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{4} \left((D_x R)^2 dx^2 + \frac{R^2}{\lambda^2} dt^2 \right).$$

En prenant le vecteur normal suivant

$$N = -i\phi^{-1} (\cosh \omega e_3 + \sinh \omega e_2) \phi,$$

il est possible de calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale de la façon suivante

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_x^2 F) = \frac{\lambda D_x R}{2} \sinh \omega, \\ f &= -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_x D_t F) = 0, \\ g &= -\frac{1}{2} \text{tr}(N D_t^2 F) = \frac{R \omega_t}{2\lambda}. \end{aligned}$$

La deuxième forme fondamentale est donnée par

$$\Pi = \frac{\lambda D_x R}{2} \sinh \omega dx^2 + \frac{R \omega_t}{2\lambda} dt^2.$$

De là, nous pouvons facilement obtenir les courbures de Gauss et moyenne, soit

$$K = 4\lambda^2 \frac{\omega_t \sinh \omega}{R D_x R}, \quad H = -\lambda \left(\frac{\sinh \omega}{D_x R} + \frac{\omega_t}{R} \right).$$

Si nous prenons le cas de la symétrie ponctuelle de translation en x , soit $R = \omega_x$, nous obtenons les courbures

$$K = 4\lambda^2 \frac{\omega_t \sinh \omega}{\omega_x \omega_{xx}}, \quad H = -\lambda \left(\frac{\sinh \omega}{\omega_{xx}} + \frac{\omega_t}{\omega_x} \right).$$

Par contre, pour le cas de translation en t , $R = \omega_t$, nous obtenons

$$K = 4\lambda^2, \quad H = -2\lambda.$$

Quant à la recherche des points umbiliques de cette surface pour les symétries généralisées, nous obtenons

$$H^2 - K = \left(\frac{\sinh \omega}{D_x R} - \frac{\omega_t}{R} \right) = 0.$$

Pour le cas de la translation en t , l'équation est identiquement satisfaite, il n'y a donc aucun point umbilique sur cette surface. Par contre, pour le cas de la translation en x , il y a des points umbiliques seulement quand l'équation suivante est respectée

$$\omega_x \sinh \omega - \omega_{xx} \omega_t = 0.$$

Si nous comparons les résultats obtenus pour Sinh-Gordon avec ceux de Sine-Gordon, nous pouvons voir que pour les deux cas, la formule d'immersion de Sym-Tafel donne des pseudo-sphères, tandis que pour les symétries généralisées, nous obtenons des sphères.

4.4 Équation non-linéaire de Schrödinger

L'équation non-linéaire de Schrödinger (NLS)

$$iq_t + q_{xx} + \nu|q|^2q = 0$$

modélise un large spectre de phénomènes physiques, que ce soit, par exemple, dans les faisceaux optiques autofocussants pour les médiums non-linéaires [16,63,90], dans l'étude de la modulation d'ondes monochromatiques en optique non-linéaire [14, 53, 62, 91], dans l'étude de la propagation des ondes de Langmuir dans les plasmas [43,59,87], dans l'étude de la propagation de paquets d'ondes non-linéaires pour les plasmas faiblement inhomogènes [22,75] et les mouvements d'un filament de vortex isolé dans un liquide infini [30]. Cette même équation apparaît dans l'analyse des ondes gravitationnelles en eau profonde [31,54,98], mais elle est aussi liée à l'équation de Ginzburg-Landau en supraconductivité à basse température [34,92].

À partir de l'équation NLS

$$iq_t + q_{xx} + \frac{1}{2}|q|^2q = 0,$$

et de son problème linéaire spectral

$$D_x\phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{bmatrix} \phi, \quad D_t\phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i(\frac{1}{2}|q|^2 - \lambda^2) & iq_x - \lambda q \\ i\bar{q}_x + \lambda\bar{q} & -i(\frac{1}{2}|q|^2 - \lambda^2) \end{bmatrix} \phi,$$

où les matrices potentielles font partie de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$, nous pouvons trouver les courbures pour l'immersion de Sym-Tafel ainsi que pour les symétries généralisées.

4.4.1 Formule d'immersion de Sym-Tafel

Dans ce cas-ci, nous avons

$$A^{ST} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2),$$

$$B^{ST} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2i\lambda & -q \\ \bar{q} & 2i\lambda \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2),$$

ce qui nous permet d'obtenir la première et la deuxième formes fondamentales

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{ST} &= \frac{1}{4} dx^2 - \lambda dx dt + \left(\lambda^2 + \frac{|q|^2}{4} \right) dt^2, \\ \mathbf{II}^{ST} &= -\frac{|q|}{2} dx^2 + \left(\frac{2\lambda|q|^2 + i(\bar{q}_x q - q_x \bar{q})}{2|q|} \right) dx dt \\ &\quad + \left(\frac{2i\lambda(q_x \bar{q} - \bar{q}_x q) + i(\bar{q}_t q - q_t \bar{q}) - 2|q|^2(\lambda^2 - |q|^2)}{4|q|} \right) dt^2. \end{aligned}$$

De là, il est simple d'obtenir les courbures, soit

$$K^{ST} = \frac{(\bar{q}_x q - q_x \bar{q})^2 - 2i|q|^2(\bar{q}_t q - q_t \bar{q}) - 2|q|^6}{|q|^4},$$

$$H^{ST} = \frac{2i\lambda(\bar{q}_x q - q_x \bar{q}) + i(\bar{q}_t q - q_t \bar{q}) - 2\lambda^2|q|^2 - 3|q|^4}{2|q|^3}.$$

4.4.2 Symétries généralisées

Définissons notre champ de vecteurs généralisés de la façon suivante

$$\vec{v} = Q[q, \bar{q}] \frac{\partial}{\partial q} + R[q, \bar{q}] \frac{\partial}{\partial \bar{q}}.$$

Nous avons donc les équations déterminantes

$$\begin{aligned} iD_t Q + D_x^2 Q + |q|^2 Q + \frac{1}{2} q^2 R &= 0, \\ -iD_t R + D_x^2 R + |q|^2 R + \frac{1}{2} \bar{q}^2 Q &= 0. \end{aligned}$$

Deux solutions de ces équations pour Q et R , *modulo* NLS, sont

$$Q = D_t q, \quad R = D_t \bar{q}$$

ou encore

$$Q = D_x q, \quad R = D_x \bar{q}.$$

Soit les termes α , β , γ et δ définis de la façon suivante

$$\alpha := QR, \quad \beta := Q\bar{q} + Rq, \quad \gamma := \lambda q - iq_x, \quad \delta := \frac{1}{2}|q|^2 - \lambda^2.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{\alpha}{4} dx^2 + \left(\frac{i(RD_x Q - QD_x R) - 2\lambda\alpha}{4} \right) dx dt \\ &\quad + \left(\frac{\beta^2 + 2(D_x R D_x Q + \lambda^2 \alpha) + i\lambda(RD_x Q - QD_x R)}{16} \right) dt^2, \\ \text{II} &= \frac{i}{2\sqrt{(D_x \alpha)^2 + \alpha\beta^2}} \left(\frac{1}{2} [RD_x(Q^2)\bar{q} - QD_x(R^2)q - 2i\lambda\alpha\beta] dx^2 \right. \\ &\quad + [D_x \alpha(R\gamma - Q\bar{\gamma}) - Q\beta(i\delta R + D_t R) + R\beta(D_t Q - i\delta Q)] dx dt \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [-2iD_x \alpha D_t \beta + 4(i\Im(q_x) - \lambda\Re(q))(iD_x(Q + R) + \lambda(R - Q)) + \kappa\beta] dt^2 \right), \\ \kappa &:= Q(4(iD_{xt} R + \lambda D_t R) + 4i\delta(iD_x R + \lambda R) - 2i\bar{\gamma}\beta) \\ &\quad + R(4(iD_{xt} Q - \lambda D_t Q) - 4i\delta(i_x Q + \lambda Q) + 2i\gamma\beta), \\ K &= \left(((D_x \alpha)^2 + \alpha\beta^2) [(D_x \alpha)^2 + \alpha(\beta^2 - 2\lambda^2 \alpha + 5i\lambda(RD_x Q - QD_x R))] \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [-4((D_x \alpha)^2(R\gamma - Q\bar{\gamma})^2 + Q^2\beta^2(i\delta R + D_t R) + R^2\beta^2(D_t Q - \delta Q) \\ &\quad - 2Q\beta(i\delta R + D_t R)D_x \alpha(R\gamma - Q\bar{\gamma}) + 2R\beta D_x \alpha(D_t Q - i\delta Q)(R\gamma - Q\bar{\gamma}) \\ &\quad - 2\alpha\beta^2(i\delta R + D_t R)(D_t Q - i\delta Q)) + i(RD_x(Q^2)\bar{q} - QD_x(R^2)q) \\ &\quad \cdot (-2iD_x \alpha D_t \beta + 4(i\Im(q_x) - \lambda\Re(q))(iD_x(Q + R) + \lambda(R - Q)) + \beta\kappa)], \\ H &= \left(\sqrt{(D_x \alpha)^2 + \alpha\beta^2} [D_x(\alpha^2) + \alpha(\beta^2 - 2\lambda^2 \alpha + 5i\lambda(RD_x Q - QD_x R))] \right)^{-1} \\ &\quad \cdot [i\alpha(-2iD_x \alpha \beta_t + 4(i\Im(q_x) - \lambda\Re(q))(iD_x(Q + R) + \lambda(R - Q)) + \beta\kappa) \\ &\quad + [2\lambda\alpha\beta + i(RD_x(Q^2)\bar{q} - QD_x(R^2)q)] [\beta^2 + 2(D_x R D_x Q + \lambda^2 \alpha) \\ &\quad + i\lambda(RD_x Q - QD_x R)] - 4i(i(RD_x Q - QD_x R) - 2\lambda\alpha)(D_x \alpha(\gamma R - \bar{\gamma}Q) \\ &\quad - Q\beta(i\delta R + D_t R) + R\beta(D_t Q - i\delta Q))]. \end{aligned}$$

En conclusion, les courbures dépendent essentiellement de la solution. Pour le cas des symétries généralisées, les courbures de Gauss K et moyenne H dépendent de Q et de R . Selon les choix de la solution des équations déterminantes, nous pouvons construire différents types de surfaces.

4.5 Équation de Ernst de la relativité générale

Considérons l'équation d'Einstein de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R est la courbure scalaire, $g_{\mu\nu}$ est la métrique, Λ est la constante cosmologique et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. Si nous posons un univers vide, c'est-à-dire que le tenseur énergie-impulsion est nul et stationnaire, nous obtenons l'équation du vide d'Einstein

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

L'équation de Ernst de la relativité générale

$$(\Re \mathcal{E}) \Delta \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E})^2,$$

ici écrite sans base spatiale explicite, fournit d'importantes solutions particulières de l'équation du vide d'Einstein dans le cas où le potentiel gravitationnel est axialement symétrique.

L'équation de Laplace pour un système axi-symétrique en coordonnées cylindriques est donnée par

$$\nabla^2 f \equiv f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}f_{\rho} + f_{\zeta\zeta} = 0.$$

Toutefois, pour des raisons de symétrie du problème, nous allons introduire les variables complexes suivantes

$$z = \rho + i\zeta, \quad \bar{z} = \rho - i\zeta,$$

pour obtenir la forme

$$\mathcal{E}_{z\bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} \mathcal{E}_z + \frac{1}{2} \frac{\rho_z}{\rho} \mathcal{E}_{\bar{z}} = \frac{\mathcal{E}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0, \quad (4.32)$$

où \mathcal{E} est le potentiel de Ernst

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}.$$

et où ξ est le potentiel gravitationnel. En effectuant cette transformation, nous obtenons l'équation elliptique analogue

$$\xi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} \xi_z + \frac{1}{2} \frac{\rho_z}{\rho} \xi_{\bar{z}} = \frac{\xi_z \xi_{\bar{z}} \bar{\xi}}{|\xi|^2 - 1}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0.$$

Il est aussi intéressant de noter que l'équation de Ernst semble intervenir aussi dans un espace à plus de 4 dimensions. Dans l'article [74], l'auteur a réduit l'équation du vide d'Einstein de dimension 5 à un système d'équations différentielles dont l'équation d'Ernst fait partie. Donc, l'étude de l'équation de Ernst pourrait peut-être avoir des répercussions jusque dans la théorie des cordes.

4.5.1 Matrices potentielles dans la base $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$

Nous avons le problème linéaire suivant

$$D_z \phi = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_z & \lambda \mathcal{E}_z \\ \lambda \bar{\mathcal{E}}_z & \bar{\mathcal{E}}_z \end{bmatrix} \phi, \quad D_{\bar{z}} \phi = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\bar{z}} & \bar{\lambda} \mathcal{E}_{\bar{z}} \\ \bar{\lambda} \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} & \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \phi, \quad \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$$

où le paramètre « non-constant » λ dépend de z et \bar{z} ainsi que du paramètre spectral k

$$\lambda = \bar{\lambda}^{-1} = \pm \sqrt{\frac{k - i\bar{Z}(\bar{z})}{k + iZ(z)}}, \quad \rho = \bar{Z}(\bar{z}) + Z(z).$$

De là, pour la formule d'immersion de Sym-Tafel, nous obtenons les matrices A^{ST} et B^{ST}

$$A^{ST} = \frac{\lambda_k}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E}_z \\ \bar{\mathcal{E}}_z & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}),$$

$$B^{ST} = \frac{-\lambda_k}{\lambda^2 (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E}_{\bar{z}} \\ \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}),$$

où $\lambda_k := \partial\lambda/\partial k$. Ceci nous permet d'obtenir les deux premières formes fondamentales

$$\mathbf{I}^{ST} = \frac{(\lambda_k)^2}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \left(\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_z dz^2 - \frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\lambda^2} dz d\bar{z} + \frac{\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\lambda^4} d\bar{z}^2 \right),$$

$$\mathbf{II}^{ST} = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2 (k + iZ(z))} \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \right) dz d\bar{z},$$

et, par la suite, d'obtenir les courbures

$$K^{ST} = -4 \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} = -16\lambda^4 \left(\frac{k + iZ(z)}{1 - \lambda^2} \right)^2,$$

$$H^{ST} = 4 \frac{\lambda}{\lambda_k} \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}} \right) = 8\lambda^2 \left(\frac{k + iZ(z)}{1 - \lambda^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}} \right).$$

Nous pouvons voir que la courbure de Gauss dépend uniquement de λ et λ_k , ou encore de $Z(z)$, de $\bar{Z}(\bar{z})$ et de k . Par contre, la courbure moyenne dépend aussi de la première dérivée de $\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}$ par rapport à z, \bar{z} .

Pour ce qui est des points umbiliques, nous avons l'équation

$$H^2 - K = \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \left[1 + \left(\frac{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} + \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}}{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}} \right)^2 \right] = 0.$$

Premièrement, pour que le terme entre crochets soit 0, nous devons avoir que $|\mathcal{E}_z|^4 + |\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}|^4 = 0$, ce qui revient à dire que \mathcal{E} doit être une constante, une solution triviale non-intéressante. Le seul autre moyen pour que $H^2 - K = 0$, est que λ/λ_k soit nul. Il peut être important de bien connaître ces deux équations pour chercher les points umbiliques de cette surface, soit

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k - i\bar{Z}(\bar{z})}{k + iZ(z)}}$$

et

$$\frac{\lambda}{\lambda_k} = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} (k + iZ(z)). \quad (4.33)$$

Pour que λ/λ_k soit nul, il faut, soit que $\lambda = 0$, (c'est-à-dire $k - i\bar{Z}(\bar{z}) = 0$) ou encore que $k + iZ(z) = 0$. Dans ces deux derniers cas, nous aurons des points umbiliques.

Pour le cas des symétries généralisées, définissons notre champ de vecteurs généralisés de la façon suivante

$$\vec{v} = Q[\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}] \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} + \tilde{Q}[\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}] \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{E}}} + R(Z) \frac{\partial}{\partial Z} + \tilde{R}(\bar{Z}) \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}. \quad (4.34)$$

Nous avons donc l'équation déterminante

$$\begin{aligned} D_{z\bar{z}}Q + \frac{\rho_z D_{\bar{z}}Q + \rho_{\bar{z}} D_z Q}{2\rho} - \frac{\mathcal{E}_z D_{\bar{z}}Q + \mathcal{E}_{\bar{z}} D_z Q}{\Re(\mathcal{E})} + \frac{2\mathcal{E}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} (Q + \tilde{Q}) \\ + \frac{\mathcal{E}_z D_{\bar{z}}\tilde{R} + \mathcal{E}_{\bar{z}} D_z R}{2\rho} - \frac{\rho_z \mathcal{E}_{\bar{z}} + \rho_{\bar{z}} \mathcal{E}_z}{2\rho^2} (R + \tilde{R}) = 0. \end{aligned}$$

Deux solutions de cette équation pour Q et R , *modulo* SNL, sont

$$Q = D_z \mathcal{E}, \quad \tilde{Q} = D_z \bar{\mathcal{E}}, \quad R = D_z Z, \quad \tilde{R} = 0$$

ou encore

$$Q = D_{\bar{z}} \mathcal{E}, \quad \tilde{Q} = D_{\bar{z}} \bar{\mathcal{E}}, \quad R = 0, \quad \tilde{R} = D_{\bar{z}} \bar{Z},$$

ce qui représente respectivement des translations en z et en \bar{z} . Définissons ici quelques

termes pour alléger la notation

$$\begin{aligned}
a_{11} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})(D_z Q + \mathcal{E}_z) - \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}), \\
a_{12} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left[\lambda D_z Q + \mathcal{E}_z \left(\frac{-i}{k + iZ} \right) \left(\frac{\tilde{R}}{\lambda} + \lambda R \right) \right] - \lambda \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}), \\
a_{21} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left[\lambda D_z \tilde{Q} + \bar{\mathcal{E}}_z \left(\frac{-i}{k + iZ} \right) \left(\frac{\tilde{R}}{\lambda} + \lambda R \right) \right] - \lambda \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}), \\
a_{22} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})(D_z \tilde{Q} + \bar{\mathcal{E}}_z) - \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}), \\
\\
b_{11} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})(D_{\bar{z}} Q + \mathcal{E}_{\bar{z}}) - \mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}), \\
b_{12} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left[\bar{\lambda} D_{\bar{z}} Q + \mathcal{E}_{\bar{z}} \left(\frac{i}{k - i\bar{Z}} \right) \left(\frac{\tilde{R}}{\lambda} + \lambda R \right) \right] - \bar{\lambda} \mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}), \\
b_{21} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left[\bar{\lambda} D_{\bar{z}} \tilde{Q} + \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} \left(\frac{i}{k - i\bar{Z}} \right) \left(\frac{\tilde{R}}{\lambda} + \lambda R \right) \right] - \bar{\lambda} \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}), \\
b_{22} &:= (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})(D_{\bar{z}} \tilde{Q} + \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}) - \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}),
\end{aligned}$$

où les matrices A et B s'écrivent

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}), \\
B &= \frac{1}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la première forme fondamentale

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \frac{1}{2(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^4} \left([a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}] dz d\bar{z} \right. \\
&\quad \left. + [a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{22}^2] dz^2 + [b_{11}^2 + b_{12}b_{21} + b_{22}^2] d\bar{z}^2 \right).
\end{aligned}$$

Définissons aussi

$$\begin{aligned}
\gamma &:= \sqrt{\frac{1}{(a_{12}b_{21})^2 + [a_{21}(b_{11} - b_{22}) + (a_{22} - a_{11})b_{12}][a_{12}(b_{22} - b_{11}) + (a_{11} - a_{22})b_{21}]}} \\
\tilde{e} &:= (a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})[(a_{11} - a_{22})_z(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) + 2(a_{22} - a_{11})(\mathcal{E}_z + \bar{\mathcal{E}}_z) + 2\lambda(a_{12}\bar{\mathcal{E}}_z - a_{21}\mathcal{E}_z)] \\
&\quad + [a_{12}(b_{22} - b_{11}) + (a_{11} - a_{22})b_{12}][a_{21,z}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - a_{21}(\mathcal{E}_z + 3\bar{\mathcal{E}}_z) + \lambda\bar{\mathcal{E}}_z(a_{22} - a_{11})] \\
&\quad + [a_{21}(b_{11} - b_{22}) + (a_{22} - a_{11})b_{21}][a_{12,z}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - a_{12}(\bar{\mathcal{E}}_z + 3\mathcal{E}_z) + \lambda\mathcal{E}_z(a_{11} - a_{22})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f} := & (a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})[(a_{11} - a_{22})_{\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) + 2(a_{22} - a_{11})(\mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}) + 2\bar{\lambda}(a_{12}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} - a_{21}\mathcal{E}_{\bar{z}})] \\
& + [a_{12}(b_{22} - b_{11}) + (a_{11} - a_{22})b_{12}][a_{21,\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - a_{21}(\mathcal{E}_{\bar{z}} + 3\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}) + \bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(a_{22} - a_{11})] \\
& + [a_{21}(b_{11} - b_{22}) + (a_{22} - a_{11})b_{21}][a_{12,\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - a_{12}(\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + 3\mathcal{E}_{\bar{z}}) + \bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}}(a_{11} - a_{22})], \\
\tilde{g} := & (a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})[(b_{11} - b_{22})_{\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) + 2(b_{22} - b_{11})(\mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}) + 2\bar{\lambda}(b_{12}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} - b_{21}\mathcal{E}_{\bar{z}})] \\
& + [a_{12}(b_{22} - b_{11}) + (a_{11} - a_{22})b_{12}][b_{21,\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - b_{21}(\mathcal{E}_{\bar{z}} + 3\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}) + \bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(b_{22} - b_{11})] \\
& + [a_{21}(b_{11} - b_{22}) + (a_{22} - a_{11})b_{21}][b_{12,\bar{z}}(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) - b_{12}(\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + 3\mathcal{E}_{\bar{z}}) + \bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}}(b_{11} - b_{22})],
\end{aligned}$$

pour obtenir la deuxième forme fondamentale

$$\Pi = \frac{\gamma}{2(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^3} \left(\tilde{e}dz^2 + 2\tilde{f}dzd\bar{z} + \tilde{g}d\bar{z}^2 \right),$$

et les courbures que voici

$$\begin{aligned}
K &= \delta^{-1}\gamma^2(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2(\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2), \\
H &= \frac{1}{2}\delta^{-1}\gamma(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})[\tilde{e}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2) + \tilde{g}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2) \\
&\quad - 2\tilde{f}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\delta &:= (a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2)(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2) \\
&\quad - (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})^2.
\end{aligned}$$

4.5.2 Matrices potentielles dans la base $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Il est intéressant de chercher des matrices potentielles appartenant à une algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Une simple transformation du PLS permet d'obtenir l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\phi = \begin{bmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \tilde{\phi} = \begin{bmatrix} \psi \\ c\bar{\psi} \end{bmatrix}, \quad \text{où } c = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}}.$$

Les matrices potentielles deviennent

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_z &= \tilde{L}\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} c\mathcal{E}_z & \lambda\mathcal{E}_z \\ c^2\lambda\bar{\mathcal{E}}_z & -c\mathcal{E}_z \end{bmatrix} \tilde{\phi} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\ \tilde{\phi}_{\bar{z}} &= \tilde{M}\tilde{\phi} = \begin{bmatrix} c\mathcal{E}_{\bar{z}} & \bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}} \\ c^2\bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} & -c\mathcal{E}_{\bar{z}} \end{bmatrix} \tilde{\phi} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).\end{aligned}$$

À partir d'ici, pour alléger la notation, nous allons faire abstraction des tildes à moins qu'il y ait présence d'une ambiguïté. En calculant les deux premières formes fondamentales ainsi que les courbures pour le cas de Sym-Tafel, nous pouvons voir que nous obtenons exactement les mêmes résultats que pour le cas de l'algèbre $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^{ST} &= \frac{(\lambda_k)^2}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \left(\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_z dz^2 - \frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\lambda^2} dz d\bar{z} + \frac{\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\lambda^4} d\bar{z}^2 \right), \\ \mathbf{II}^{ST} &= \frac{2\lambda_k}{\lambda} \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2} \right) dz d\bar{z}, \\ K^{ST} &= -4 \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} = -16\lambda^4 \left(\frac{k + iZ(z)}{1 - \lambda^2} \right)^2, \\ H^{ST} &= 4 \frac{\lambda}{\lambda_k} \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}} \right) = 8\lambda^2 \left(\frac{k + iZ(z)}{1 - \lambda^2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}}}{\bar{\mathcal{E}}_z \mathcal{E}_{\bar{z}} - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}} \right).\end{aligned}$$

Par contre, pour le cas des symétries généralisées, nous obtenons des résultats différents de ceux de l'algèbre $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Pour commencer, en conservant le même champ de vecteurs généralisés, les matrices A et B prennent la forme

$$\begin{aligned}A = \text{pr}(\vec{v})L &= \begin{bmatrix} cQ_z - c^2\mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}) & \alpha\mathcal{E}_z + \lambda Q_z \\ c^2(\alpha\bar{\mathcal{E}}_z + \lambda\tilde{Q}_z) - 2\lambda c^3\bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}) & c^2\mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}) - cQ_z \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \\ B = \text{pr}(\vec{v})M &= \begin{bmatrix} cQ_{\bar{z}} - c^2\mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) & \bar{\alpha}\mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\lambda}Q_{\bar{z}} \\ c^2(\bar{\alpha}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} + \bar{\lambda}\tilde{Q}_{\bar{z}}) - 2\bar{\lambda}c^3\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) & c^2\mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) - cQ_{\bar{z}} \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),\end{aligned}$$

où $\alpha = \text{pr}(\vec{v})\lambda = -i(\lambda R + \bar{\lambda}\tilde{R})/(k + iZ(z))$ et \vec{v} est défini à l'équation (4.34). La

première forme fondamentale est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = & \left\{ \left[cQ_z - c^2 \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}) \right]^2 + [\alpha \mathcal{E}_z + \lambda Q_z] \left[c^2(\alpha \bar{\mathcal{E}}_z + \lambda \tilde{Q}_z) - 2c^3 \lambda \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}) \right] \right\} dz^2 \\ & + \left\{ 2 \left[cQ_z - c^2 \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}) \right] \left[cQ_{\bar{z}} - c^2 \mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) \right] \right. \\ & \quad + [\alpha \mathcal{E}_z + \lambda Q_z] \left[c^2(\bar{\alpha} \mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\lambda} \tilde{Q}_{\bar{z}}) - 2c^3 \bar{\lambda} \bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) \right] \\ & \quad \left. + [\bar{\alpha} \mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\lambda} Q_{\bar{z}}] \left[c^2(\alpha \bar{\mathcal{E}}_z + \lambda \tilde{Q}_z) - 2c^3 \lambda \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}) \right] \right\} dz d\bar{z} \\ & + \left\{ \left[cQ_{\bar{z}} - c^2 \mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}) \right]^2 + [\bar{\alpha} \mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\lambda} Q_{\bar{z}}] \left[c^2(\bar{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_z + \bar{\lambda} \tilde{Q}_z) - 2c^3 \bar{\lambda} \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}) \right] \right\} d\bar{z}^2 \end{aligned}$$

Avant de présenter la deuxième forme fondamentale, nous allons définir certains termes pour alléger la notation.

$$\begin{aligned} a_1 &= cQ_z - c^2 \mathcal{E}_z(Q + \tilde{Q}), \\ a_2 &= \alpha \mathcal{E}_z + \lambda Q_z, \\ a_3 &= c^2(\alpha \bar{\mathcal{E}}_z + \lambda \tilde{Q}_z) - 2c^3 \lambda \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= cQ_{\bar{z}} - c^2 \mathcal{E}_{\bar{z}}(Q + \tilde{Q}), \\ b_2 &= \bar{\alpha} \mathcal{E}_{\bar{z}} + \bar{\lambda} Q_{\bar{z}}, \\ b_3 &= c^2(\bar{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_z + \bar{\lambda} \tilde{Q}_z) - 2c^3 \bar{\lambda} \bar{\mathcal{E}}_z(Q + \tilde{Q}), \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + 4(a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}}.$$

Ceci nous donne la deuxième forme fondamentale

$$\begin{aligned}
\Pi = \eta \{ & [(a_2b_3 - a_3b_2)(a_{1,z} + a_2c^2\lambda\bar{\mathcal{E}}_z - a_3\lambda\mathcal{E}_z) \\
& + (a_1b_2 - a_2b_1)(a_{3,z} + 2(a_3c\mathcal{E}_z - a_1c^2\lambda\bar{\mathcal{E}}_z)) \\
& + (a_3b_1 - a_1b_3)(a_{2,z} + 2(a_1\lambda\mathcal{E}_z - a_2c\mathcal{E}_z))] dz^2 \\
& + 2 [(a_2b_3 - a_3b_2)(a_{1,\bar{z}} + a_2c^2\bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} - a_3\bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}}) \\
& + (a_1b_2 - a_2b_1)(a_{3,\bar{z}} + 2(a_3c\mathcal{E}_{\bar{z}} - a_1c^2\bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}})) \\
& + (a_3b_1 - a_1b_3)(a_{2,\bar{z}} + 2(a_1\bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}} - a_2c\mathcal{E}_{\bar{z}}))] dzd\bar{z} \\
& + [(a_2b_3 - a_3b_2)(b_{1,\bar{z}} + b_2c^2\bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}} - b_3\bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}}) \\
& + (a_1b_2 - a_2b_1)(b_{3,\bar{z}} + 2(b_3c\mathcal{E}_{\bar{z}} - b_1c^2\bar{\lambda}\bar{\mathcal{E}}_{\bar{z}})) \\
& + (a_3b_1 - a_1b_3)(b_{2,\bar{z}} + 2(b_1\bar{\lambda}\mathcal{E}_{\bar{z}} - b_2c\mathcal{E}_{\bar{z}}))] d\bar{z}^2 \} .
\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons pu dériver les solutions générales des formes fondamentales pour l'équation de Ernst. Les équations des courbures sont extrêmement longues mais non-triviales, elles n'ont donc pas été écrites.

4.6 Système de Bianchi

Soit le système d'équations

$$\Delta_\nu = \begin{cases} \Delta_1 \equiv \omega_{uv} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_u}{\rho} \frac{b}{a} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_v}{\rho} \frac{a}{b} \sin \omega \right)_v - ab \sin \omega = 0, \\ \\ \Delta_2 \equiv a_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b \cos \omega = 0, \\ \\ \Delta_3 \equiv b_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a \cos \omega = 0, \\ \\ \Delta_4 \equiv \rho_{uv} = 0, \end{cases}$$

et son PLS

$$\begin{aligned}\phi_u = L\phi &= \frac{i}{2} \left[\lambda a \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 + \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) + \frac{1}{2} \left(\omega_u + \frac{a}{b} \frac{\rho_v}{\rho} \sin \omega \right) \sigma_2 \right] \phi, \\ \phi_v = M\phi &= \frac{i}{2} \left[\frac{b}{\lambda} \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 - \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) - \frac{1}{2} \left(\omega_v + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \omega \right) \sigma_2 \right] \phi,\end{aligned}$$

qui obéit à la représentation de courbure nulle et où les matrices potentielles appartiennent à l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Il est important de noter que λ n'est pas le paramètre spectral, mais qu'il dépend du paramètre spectral k

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k - V(v)}{k + U(u)}}, \quad \text{où } \rho = U(u) + V(v).$$

4.6.1 Formule d'immersion de Sym-Tafel

En appliquant la dérivée par rapport au paramètre spectral k sur les matrices potentielles L et M , nous obtenons les matrices A et B

$$\begin{aligned}A &= \frac{ia\lambda_k}{2} \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 + \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right), \\ B &= \frac{-ib\lambda_k}{2\lambda^2} \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 - \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right),\end{aligned}$$

où $\lambda_k := \partial\lambda/\partial k$. De là, il est possible de trouver les deux premières formes fondamentales de la surface solitonique associée à l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$

$$\begin{aligned}I^{ST} &= \left[\frac{\lambda_k}{2} \left(adu + \frac{b}{\lambda^2} dv \right) \right]^2, \\ II &= \frac{ab\lambda_k}{2\lambda} \sin \omega \, dudv.\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir respectivement la courbure de Gauss et la courbure moyenne

$$\begin{aligned}K^{ST} &= -\frac{4\lambda^2}{\lambda_k^2} = -\frac{16\lambda^4(k + U(u))^2}{(1 - \lambda^2)^2}, \\ H^{ST} &= \frac{-2\lambda}{\lambda_k} \cot \omega = \frac{-4\lambda^2(k + U(u))}{1 - \lambda^2} \cot \omega,\end{aligned}$$

où la courbure de Gauss ne dépend que du paramètre spectral k et des fonctions $U(u)$ et $V(v)$, mais la courbure moyenne dépend aussi de ω .

Pour ce qui est des points umbiliques, nous utilisons l'équation $H^2 - K = 0$ pour obtenir

$$(H^{ST})^2 - K^{ST} = -\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \frac{1}{\sin^2 \omega} = 0.$$

Encore une fois, si $\omega = \pm i\infty$, l'équation est satisfaite, mais ce n'est pas un cas intéressant. Par contre, le cas $\lambda/\lambda_k = 0$ est beaucoup plus intéressant. À titre de rappel,

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k - \mathcal{V}}{k + \mathcal{U}}}.$$

Nous pouvons simplifier λ/λ_k de sorte que

$$\frac{\lambda}{\lambda_k} = \frac{\lambda^2(k + \mathcal{U})}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Ici deux possibilités s'offrent à nous, soit $\lambda = 0$ ou $k + \mathcal{U} = 0$. Néanmoins, la possibilité $\lambda = 0$ peut s'écrire aussi $k - \mathcal{V} = 0$. Au final, nous aurons des points umbiliques seulement lorsque $k + \mathcal{U} = 0$ ou lorsque $k - \mathcal{V} = 0$.

4.6.2 Symétries généralisées

Pour le cas des symétries généralisées, commençons par trouver les équations déterminantes. Pour ce faire, nous allons définir le champ de vecteurs de la façon suivante

$$\vec{v} = P(u) \frac{\partial}{\partial U} + Q(v) \frac{\partial}{\partial V} + R(u, v) \frac{\partial}{\partial \omega} + S(u, v) \frac{\partial}{\partial a} + T(u, v) \frac{\partial}{\partial b},$$

où P et Q sont des fonctions d'une seule variable à cause du fait que leur fonctions d'origines dépendent d'une seule variable. En appliquant l'opérateur de prolongation sur les équations du système de départ Δ_ν où $\nu = 1, 2, 3, 4$, nous obtenons respective-

ment

$$\begin{aligned} \text{pr}(\vec{v})\Delta_1 = & R_{uv} + \frac{D_u}{2} \left[\frac{D_u(P+Q)}{\rho} \frac{b}{a} \sin \omega - \frac{(P+Q)\rho_u}{\rho^2} \frac{b}{a} \sin \omega \right. \\ & \left. + \frac{\rho_u T}{\rho} \frac{1}{a} \sin \omega - \frac{\rho_u b S}{\rho} \frac{1}{a^2} \sin \omega + \frac{\rho_u b}{\rho} \frac{1}{a} R \cos \omega \right] \\ & + \frac{D_v}{2} \left[\frac{D_v(Q+P)}{\rho} \frac{a}{b} \sin \omega - \frac{(P+Q)\rho_v}{\rho^2} \frac{a}{b} \sin \omega \right. \\ & \left. + \frac{\rho_v S}{\rho} \frac{1}{b} \sin \omega - \frac{\rho_v a T}{\rho} \frac{1}{b^2} \sin \omega + \frac{\rho_v a}{\rho} \frac{1}{b} R \cos \omega \right] \\ & - Sb \sin \omega - aT \sin \omega - abR \cos \omega = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr}(\vec{v})\Delta_2 = & S_v + \frac{1}{2} \left(\frac{D_v(P+Q)}{\rho} a - \frac{(P+Q)\rho_v}{\rho^2} a + \frac{\rho_v S}{\rho} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{D_u(Q+P)}{\rho} c \cos \omega - \frac{(Q+P)\rho_u}{\rho^2} b \cos \omega + \frac{\rho_u T}{\rho} \cos \omega - \frac{\rho_u}{\rho} a R \sin \omega \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr}(\vec{v})\Delta_3 = & T_u + \frac{1}{2} \left(\frac{D_u(P+Q)}{\rho} b - \frac{(P+Q)\rho_u}{\rho^2} b + \frac{\rho_u T}{\rho} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{D_v(P+Q)}{\rho} a \cos \omega - \frac{(P+Q)\rho_v}{\rho^2} a \cos \omega + \frac{\rho_v S}{\rho} \cos \omega - \frac{\rho_v}{\rho} a R \sin \omega \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{pr}(\vec{v})\Delta_4 = D_u D_v (Q + P) = 0.$$

Nous pouvons facilement trouver que les deux symétries généralisées de translation, soit en u et en v , sont applicables au système de départ Δ_ν . Par la suite, dans le but d'obtenir la première et la deuxième formes fondamentales, nous aurons besoin des matrices A et B . Pour ce faire, nous appliquons l'opérateur de prolongation aux matrices potentielles et nous obtenons les matrices A et B qui sont linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} A &= \frac{i}{2} \left[\alpha \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 + \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) + \beta \left(\cos \frac{\omega}{2} \sigma_1 - \sin \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) + a_2 \sigma_2 \right] \in \mathfrak{su}(2), \\ B &= \frac{i}{2} \left[\gamma \left(\sin \frac{\omega}{2} \sigma_1 - \cos \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) + \delta \left(\cos \frac{\omega}{2} \sigma_1 + \sin \frac{\omega}{2} \sigma_3 \right) + b_2 \sigma_2 \right] \in \mathfrak{su}(2), \end{aligned}$$

où les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a_2$ et b_2 sont définis de la façon suivante

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda S - \frac{Q + \lambda^2 P}{2\lambda(k + U)}a, & \beta &= \frac{\lambda a R}{2}, \\ \gamma &= \frac{T}{\lambda} + \frac{Q + \lambda^2 P}{2\lambda^3(k + U)}b, & \delta &= -\frac{bR}{2\lambda}, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left[R_u + \left\{ \frac{S}{b} \frac{\rho_v}{\rho} - \frac{aT}{b^2} \frac{\rho_v}{\rho} + \frac{a}{b} \frac{D_v(P + Q)}{\rho} - \frac{a}{b} \frac{(P + Q)\rho_v}{\rho^2} \right\} \sin \omega + \frac{a}{b} \frac{\rho_v}{\rho} R \cos \omega \right], \\ b_2 &= -\frac{1}{2} \left[R_v + \left\{ \frac{T}{a} \frac{\rho_u}{\rho} - \frac{bS}{a^2} \frac{\rho_u}{\rho} + \frac{b}{a} \frac{D_u(P + Q)}{\rho} - \frac{b}{a} \frac{(P + Q)\rho_u}{\rho^2} \right\} \sin \omega + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} R \cos \omega \right].\end{aligned}$$

La première forme fondamentale prend alors la forme

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4} \{ (\alpha^2 + \beta^2 + a_2^2) du^2 + (\gamma^2 + \delta^2 + b_2^2) dv^2 \\ &\quad + 2[a_2 b_2 + (\alpha\delta - \beta\gamma) \sin \omega + (\beta\delta - \alpha\gamma) \cos \omega] dudv \}.\end{aligned}$$

Avant de donner le résultat de la deuxième forme fondamentale, nous allons définir le paramètre η qui est, à un facteur près, la norme du produit vectoriel des vecteurs tangents au moyen de la forme de Killing

$$\begin{aligned}\eta &= \left\{ \left[a_2 \left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right) - b_2 \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad + [(\alpha\gamma - \beta\delta) \sin \omega + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cos \omega]^2 \\ &\quad \left. + \left[b_a \left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right) - a_2 \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right]^2 \right\}^{-1/2}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième forme fondamentale, nous obtenons le cas non-trivial

$$\begin{aligned}
\Pi = & -\frac{\eta}{2} \left\{ \left\{ \left[\left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right)_u + \frac{1}{2} \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right. \right. \right. \\
& \cdot \left(\omega_u + \frac{a}{b} \frac{\rho_v}{\rho} \sin \omega \right) - a_2 \left(\lambda a \cos \frac{\omega}{2} \right) \Big] \\
& \cdot \left[a_2 \left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right) - b_2 \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& + [a_{2,u} + \lambda a \alpha] [(\alpha \gamma - \beta \delta) \sin \omega + (\alpha \delta + \beta \gamma) \cos \omega] \\
& + \left[\left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right)_u + a_2 \left(\lambda a \sin \frac{\omega}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\omega_u + \frac{a}{b} \frac{\rho_v}{\rho} \sin \omega \right) \left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& \cdot \left[b_2 \left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right) - a_2 \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \Big\} du^2 \\
& + 2 \left\{ \left[\left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right)_v - \frac{1}{2} \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right. \right. \\
& \cdot \left(\omega_v + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \omega \right) - a_2 \left(\frac{b}{\lambda} \cos \frac{\omega}{2} \right) \Big] \\
& \cdot \left[a_2 \left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right) - b_2 \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& + \left[a_{2,v} - \frac{b}{\lambda} \beta \cos \omega - \alpha \frac{b}{\lambda} \sin \omega \right] [(\alpha \gamma - \beta \delta) \sin \omega + (\alpha \delta + \beta \gamma) \cos \omega] \\
& + \left[\left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right)_v + a_2 \left(\frac{b}{\lambda} \sin \frac{\omega}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\omega_v + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \omega \right) \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& \cdot \left[b_2 \left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right) - a_2 \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \Big\} dudv \\
& + \left\{ \left[\left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right)_v - \frac{1}{2} \left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right) \right. \right. \\
& \cdot \left(\omega_v + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \omega \right) - b_2 \left(\frac{b}{\lambda} \cos \frac{\omega}{2} \right) \Big] \\
& \cdot \left[a_2 \left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right) - b_2 \left(\alpha \cos \frac{\omega}{2} - \beta \sin \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& + \left[b_{2,v} + \delta \frac{b}{\lambda} \right] [(\alpha \gamma - \beta \delta) \sin \omega + (\alpha \delta + \beta \gamma) \cos \omega] \\
& + \left[\left(\delta \sin \frac{\omega}{2} - \gamma \cos \frac{\omega}{2} \right)_v + b_2 \left(\frac{b}{\lambda} \sin \frac{\omega}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\omega_v + \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \omega \right) \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
& \cdot \left[b_2 \left(\alpha \sin \frac{\omega}{2} + \beta \cos \frac{\omega}{2} \right) - a_2 \left(\gamma \sin \frac{\omega}{2} + \delta \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] \Big\} dv^2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Les courbures n'ont pas été écrites explicitement à cause de leur longueur.

Chapitre 5

Lois de conservation et opérateur d'homotopie : Application à l'équation de Sine-Gordon

Ce chapitre est principalement tiré des livres de Hereman [55,56,57] et de Olver [78]. En physique, les lois de conservation sont très importantes, principalement la conservation de l'énergie, la conservation de la quantité de mouvement, la conservation du moment angulaire, etc. Il peut donc être intéressant de trouver de nouvelles lois de conservation qui pourraient nous être utiles. Pour ce faire, plusieurs mathématiciens et physiciens ont travaillé sur des moyens de les obtenir et donc nous allons présenter quelques uns de ces théorèmes. Pour la première section, nous introduisons le théorème de Noether sous sa première et deuxième forme qui nous permet d'obtenir des lois de conservation. Toutefois, l'opérateur d'homotopie introduit dans la seconde section est beaucoup plus rapide d'utilisation puisque nous pouvons facilement trouver des lois de conservation avec seulement un changement d'échelle. Nous allons, par la suite, appliquer cet opérateur pour obtenir des lois de conservations pour l'équation de KdV, l'équation d'onde en eau peu profonde et, bien entendu, pour l'équation de Sine-

Gordon.

5.1 Théorème de Noether

Emmy Noether a établi pour la première fois en 1918 la correspondance entre les symétries et les quantités conservées d'un système d'équations différentielles exprimé sous une forme variationnelle. Ces systèmes proviennent d'un problème d'optimisation sur un ouvert $\Omega \subset X$ d'une fonctionnelle

$$\mathfrak{L}[u] = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) dx \quad (5.1)$$

pour une classe de fonctions $u = f(x)$ définies sur Ω . La fonction $L(x, u^{(n)})$ est appelée le Lagrangien du problème variationnel $\mathfrak{L}[u]$.

Définition 5.1. *L'opérateur d'Euler d'ordre 0, $\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}$ est défini pour $1 \leq \alpha \leq q$ par*

$$\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)} = \sum_J (-D)_J \partial_{u_J^\alpha}, \quad (5.2)$$

où la somme parcourt tous les multi-indices $J = (j_1, \dots, j_k)$, avec $1 \leq \alpha \leq q$. Ici, $u(x)$ représente le vecteur des variables dépendantes dépendant des variables indépendantes. Évidemment, $D_{xx} = D_x^2$, $D_x D_y = D_{xy}$ et ainsi de suite.

Par exemple, en une dimension ($\dim X = 1$), nous avons

$$\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-D_x)^k \partial_{u_{kx}} = \partial_u - D_x \partial_{u_x} + D_x^2 \partial_{u_{xx}} - D_x^3 \partial_{u_{3x}} + \dots$$

et en deux dimensions, ($\dim X = 2$),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u(x,y)}^{(0,0)} &= \sum_{k_x=0}^{\infty} \sum_{k_y=0}^{\infty} (-D_x)^{k_x} (-D_y)^{k_y} \partial_{u_{k_x k_y}} \\ &= \partial_u - D_x \partial_{u_x} - D_y \partial_{u_y} + D_x^2 \partial_{u_{xx}} + D_y^2 \partial_{u_{yy}} + D_x D_y \partial_{u_{xy}} + \dots \end{aligned}$$

et en trois dimensions, ($\dim X = 3$),

$$\mathcal{L}_{u^{(j)}(x,y,z)}^{(0,0,0)} = \sum_{k_x=0}^{M_x^{(j)}} \sum_{k_y=0}^{M_y^{(j)}} \sum_{k_z=0}^{M_z^{(j)}} (-D_x)^{k_x} (-D_y)^{k_y} (-D_z)^{k_z} \frac{\partial^{k_x+k_y+k_z}}{\partial_{k_x x k_y y k_z z}^{(j)}}.$$

Notons que $u_{k_x x k_y y}$ dénote $u_{xx \dots x yy \dots y}$, x étant répété k_x fois et y k_y fois.

Ce formalisme est très important dans la formulation de la mécanique classique. Il permet notamment d'énoncer sous la forme compact le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Si $u = f(x)$ est un extremum du problème variationnel (5.1), alors u est une solution des équations d'Euler-Lagrange*

$$\mathcal{L}_{u^\alpha(x)}^{(0)}(L) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

En particulier, ceci s'applique au Lagrangien $L(t, u, u_t)$ d'un problème variationnel.

Définition 5.2. *Un groupe de transformations locales agissant sur un domaine de $M \subset \Omega_0 \times U$ est un groupe de symétrie variationnel du problème (5.1) si pour tout sous-domain fermé $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$, toute fonction lisse $u = f(x)$ définie sur Ω à image dans M et tout $g \in G$ tel que $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ est une fonction sur $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$, alors*

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, pr^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x})) d\tilde{x} = \int_{\Omega} L(x, pr^{(n)} f(x)) dx.$$

Notons que tout groupe de symétrie d'un problème variationnel constitue également le groupe de symétrie des équations d'Euler-Lagrange associées à ce problème. Notons que la réciproque est généralement fausse.

Théorème 5.2. : Théorème de Noether, première formulation. *Un groupe de Lie connexe de transformations agissant sur $M \subset \Omega_0 \times U$ est un groupe de symétrie du problème variationnel (5.1) si et seulement si*

$$pr^{(n)} v(L) + L \text{Div} \xi = 0$$

pour tout $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ et tout générateur infinitésimal

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \partial_x^i + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha},$$

où $\text{Div}\xi$ représente la divergence totale du vecteur $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)$. Ce résultat est très utile pour déterminer les symétries d'un problème variationnel.

Par exemple, considérons le problème de minimisation de la distance entre deux points, a et b appartenant à $X \times U \subset \mathbb{R}^2$. Ce problème revient à minimiser l'intégrale

$$\mathfrak{L}[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2} dx.$$

Vérifions l'effet d'une rotation de l'espace sur ce problème de minimisation en utilisant la première formulation du théorème de Noether et le générateur infinitésimal de la rotation, $v = -u\partial_x + x\partial_u$. Nous pouvons trouver que

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}v(L) + LD_x\xi &= (-u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)\partial_{u_x}) \cdot \sqrt{1 + u_x^2} + \sqrt{1 + u_x^2}D_x(-u), \\ &= (1 + u_x^2) \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} - u_x \sqrt{1 + u_x^2} \equiv 0. \end{aligned}$$

Ce résultat signifie tout simplement que la distance minimale entre deux points demeure inchangée sous les rotations de l'espace.

Une loi de conservation d'un système d'équations différentielles est une expression du type

$$\text{Div}P = D_{x^1}P_1 + D_{x^2}P_2 + \dots + D_{x^p}P_p = 0,$$

qui est automatiquement satisfaite pour toute solution de ce système. L'opérateur D_{x^i} représente la dérivée totale par rapport à x^i et P est un vecteur à p composantes. Pour un système en évolution, c'est-à-dire lorsqu'une variable joue le rôle du temps, une loi de conservation s'écrit sous la forme

$$D_t\rho + \text{Div}J = 0,$$

où ρ est la densité conservée et $J \in \mathbb{R}^p$ le flux qui lui est associé. On considérera seulement les lois de conservation pour lesquelles ρ et J ne dépendent que des variables dépendantes et leurs dérivées partielles, c'est-à-dire que $\rho = \rho(u, u_t, u_x, u_{xt}, \dots)$ et $J = J(u, u_t, u_x, u_{xt}, \dots)$. Pour une grande quantité de problèmes physiques, les conditions

de frontières imposent que les variables dépendantes et leurs dérivées tendent vers 0 aux limites du domaine de définition. Il en va de même pour le flux J et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx dy dz = \text{constante}$$

représente une constante du mouvement.

La prochaine formulation du théorème de Noether établit une correspondance entre les symétries d'un problème variationnel et les lois de conservation que celui-ci admet.

Théorème 5.3. : Théorème de Noether, seconde formulation. Soit G le groupe (local) de symétrie à un paramètre du problème variationnel (5.1) et

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha}$$

le générateur infinitésimal de G . Notons

$$Q^\alpha(x, u) = \eta^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) u_i^\alpha, \quad u_i^\alpha = \partial_x^i u^\alpha,$$

les caractéristiques du champ de vecteurs v . Alors, il existe un vecteur $P(x, u^{(m)}) = (P_1, \dots, P_p)$ tel que

$$\text{Div} P = \sum_{\alpha=1}^q Q_\alpha \mathcal{L}_{u^\alpha(x)}^{(0)}(L).$$

Ceci implique que $\text{Div} P = 0$ pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange

$$\mathcal{L}_{u^1(x)}^{(0)} = \dots = \mathcal{L}_{u^q(x)}^{(0)} = 0.$$

Notons que le vecteur P n'est pas déterminé de façon unique pour chaque symétrie du problème. En effet, pour un vecteur $K \in \mathbb{R}^p$, nous savons que

$$\text{Div}(P + \nabla \times K) = \text{Div} P,$$

puisque l'opérateur de divergence annule les termes provenant d'un rotationnel. Deux vecteurs P_1 et P_2 seront donc équivalents si $\text{Div}(P_1 - P_2) = 0$. La forme générale

de P n'est pas utile dans cet exposé et est donc omise. Il peut arriver que plusieurs symétries fournissent la même loi de conservation.

Le théorème de Noether possède plusieurs limites importantes. Tout d'abord, la recherche du groupe de symétrie d'un problème variationnel n'est pas toujours triviale. En effet, il est difficile de savoir si un problème est exprimé sous une forme variationnelle. Il est à noter que certaines transformations ponctuelles peuvent transformer un système exprimable sous forme variationnelle vers un problème qui ne l'est pas. De plus, il n'existe aucun algorithme pour déterminer une transformation assurant que le système transformé est exprimé sous forme variationnelle. Enfin, il arrive souvent qu'on soit incapable de déterminer le Lagrangien qui décrit un certain problème physique. Le Lagrangien de la majorité des problèmes classiques ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur à un ou deux. Pour les systèmes plus complexes, il est habituellement plus difficile de trouver un Lagrangien le décrivant. Le théorème n'est alors d'aucune utilité pour déterminer des lois de conservation.

Il convient donc d'établir une méthode qui permettrait de décrire les quantités conservées d'un système sans faire appel au formalisme Lagrangien. La prochaine section répond à cette impasse.

5.2 Opérateur d'homotopie

L'approche que nous allons utiliser est basée sur l'opérateur d'homotopie et a été introduite par Kruskal et al. au début des années 1970 [67]. La formulation en termes de formes différentielles a été établie par I. Anderson et peut être trouvée, par exemple, dans Olver [78]. La prochaine présentation est celle de W. Hereman [55,56,57] et ne fait appel qu'à des concepts de calcul multidimensionnel.

Afin de construire des lois de conservation pour un système d'équations différentielles quelconque, nous considérons un sous-groupe de son groupe de symétrie, soit les opérateurs de changement d'échelle.

Définition 5.3. *Un système d'équations différentielles est invariant sous la dilatation*

$$(t, x, u) \rightarrow (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}) = (\lambda^{p_t} t, \lambda^{p_{x^1}} x^1, \dots, \lambda^{p_{x^n}} x^n, \lambda^{p_{u^1}} u^1, \dots, \lambda^{p_{u^q}} u^q), \quad \lambda^{p_i} \in \mathbb{R},$$

si $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u})$ est une solution lorsque (t, x, u) en est une.

Chaque p est appelé le poids attaché à la variable correspondante. On note habituellement $W(x^i) = p_{x^i}$ et on voit aisément que, selon la règle de la dérivée en chaîne, $W(\partial_{x^i}) = -W(x^i) = -p_{x^i}$. Le poids d'un monôme est défini comme la somme des poids le composant. Par exemple,

$$W(u_t + u_x^2) = W(u) + W(\partial_t) + 2(W(u) + W(\partial_x)) = 3W(u) + W(\partial_t) + 2W(\partial_x).$$

Définition 5.4. *Un polynôme est de rang uniforme si tous les monômes le composant possèdent le même rang.*

Ainsi, pour l'exemple précédent, cette demande reviendrait à

$$\begin{aligned} W(u_t) = W(u_x^2) &\rightarrow W(u) + W(\partial_t) = 2(W(u) + W(\partial_x)) \\ &\rightarrow W(u) = 2W(\partial_x) - W(\partial_t). \end{aligned}$$

Le polynôme $u_t + u_x^2$ serait donc invariant et de rang uniforme sous la transformation $(t, x, u) \rightarrow (\lambda^{-4}t, \lambda^{-1}x, \lambda^2u)$. Ceci permet d'éviter les longs calculs reliés à la recherche du groupe de symétries du système d'équations considéré.

Remarquons que tout système hyperbolique d'EDP admet une symétrie de dilatation. Ces systèmes décrivent la majorité des problèmes de la mécanique des fluides (entre autres les équations d'Euler décrivant un écoulement incompressible) et de la théorie des champs non-linéaires.

On démontre que les polynômes de rang uniforme forment les candidats idéaux pour construire les densités conservées ρ sous forme polynômiale. Pour une loi de conservation d'un système évolutif, on propose de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour intégrer l'expression

$$E = \text{Div} J = -D_t \rho,$$

lorsqu'on impose une forme spécifique à la fonction ρ .

Le calcul vectoriel ne nous permet pas de déterminer si une quantité scalaire f peut s'exprimer comme une divergence, en fait s'il existe F tel que $\text{Div} F = f$. En une dimension, cela revient à chercher F tel que $D_x F = f$, ou encore $F = \int f dx$. En plusieurs dimensions, le travail revient à de multiples intégrales par parties. Toutefois, cette technique est rarement applicable et ne peut être algorithmique.

L'opérateur d'Euler d'ordre 0 introduit en (5.2) est d'une importance capitale et permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 5.4. : Théorème de Kruskal. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit une divergence, c'est-à-dire qu'il existe une fonction différentiable F telle que $f = \text{Div} F$, est que*

$$\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}(f) = 0.$$

En d'autres mots, l'opérateur d'Euler annule les divergences.

La preuve de ce théorème est technique et est effectuée dans [67].

Exemple 5.1 : Conditions pour être une divergence. Considérons par exemple l'expression

$$f = u_x v_y - u_{xx} v_y - u_y v_x + u_{xy} v_x,$$

en deux variables dépendantes et deux variables indépendantes. Pour déterminer s'il existe un vecteur $F = (F_x, F_y)$ tel que $f = D_x F_x + D_y F_y$, on doit vérifier que

$\mathcal{L}_{u(x,y)}^{(0,0)}(f) = \mathcal{L}_{v(x,y)}^{(0,0)}(f) = 0$. On calcule

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{u(x,y)}^{(0,0)} &= \frac{\partial f}{\partial u} - D_x \frac{\partial f}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial f}{\partial u_y} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} + D_{xy} \frac{\partial f}{\partial u_{xy}} + D_y^2 \frac{\partial f}{\partial u_{yy}} \\ &= -D_x(v_y) - D_y(v_x) + D_x^2(-v_y) + D_{xy}(v_x) + D_y^2(0) \\ &= -v_{xy} + v_{xy} - v_{xxy} + v_{xxy} \equiv 0 \\ \mathcal{L}_{v(x,y)}^{(0,0)} &= \frac{\partial f}{\partial v} - D_x \frac{\partial f}{\partial v_x} - D_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial v_{xx}} + D_{xy} \frac{\partial f}{\partial v_{xy}} + D_y^2 \frac{\partial f}{\partial v_{yy}} \\ &= -D_x(-u_y) - D_y(u_x) \equiv 0.\end{aligned}$$

La construction du vecteur F se fait à l'aide de l'opérateur d'homotopie. Pour y parvenir, on introduit tout d'abord l'opérateur du degré en se limitant à une seule variable dépendante qui dépend d'une variable indépendante. Par la suite, lorsque nécessaire, la k^e dérivée de u par rapport à x sera dénotée par u_{kx} . De plus, lors des exemples de calculs, les exposants représentent les puissances des variables dépendantes.

Définition 5.5. *Pour une fonction différentiable f d'ordre M , on définit l'opérateur du degré \mathcal{M} par*

$$\mathcal{M}f = \sum_{i=0}^M u_{ix} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}} = u \frac{\partial f}{\partial u} + u_x \frac{\partial f}{\partial u_x} + \dots + u_{Mx} \frac{\partial f}{\partial u_{Mx}}.$$

Par exemple, pour $f = u^p u_x^q u_{3x}^r$, p, q, r des entiers non-négatifs, on trouve

$$\mathcal{M}f = \sum_{i=0}^M u_{ix} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}} = (p + q + r) u^p u_x^q u_{3x}^r.$$

Donc, l'opérateur du degré « retourne » le degré total $p + q + r$ du monôme f . La puissance de l'opérateur d'homotopie est basée sur l'observation suivante. Pour une fonction différentiable $g(u)$, on montre que

$$\mathcal{M}^{-1}g(u) = \int_0^1 g[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda},$$

où $g[\lambda u]$ représente la fonction $g(u)$ dans laquelle on substitue u par λu , u_x par λu_x et ainsi de suite. Notons que si $g(u)$ est d'ordre M , alors $g[\lambda u]$ est également d'ordre M et

$$\frac{d}{d\lambda} g[\lambda u] = \sum_{i=0}^M \frac{\partial g[\lambda u]}{\partial \lambda u_{ix}} \frac{d\lambda u_{ix}}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^M u_{ix} \frac{\partial g[\lambda u]}{\partial u_{ix}} = \frac{1}{\lambda} \mathcal{M}g[\lambda u].$$

En intégrant par rapport à λ , on trouve

$$\int_0^1 \frac{d}{d\lambda} g[\lambda u] d\lambda = g[\lambda u]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = g(u) - g(0) = \int_0^1 \mathcal{M}g[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} = \mathcal{M} \int_0^1 g[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

On suppose que $g(0) = 0$, ce qui est raisonnable puisque l'on considèrera des fonctions différentiables impliquant des monômes en u, u_x, \dots , qui peuvent être multipliées par $\cos(u)$ ou $\sin(u)$. Sous ces conditions, on applique \mathcal{M}^{-1} de chaque côté, ce qui nous donne

$$\mathcal{M}^{-1}g(u) = \int_0^1 g[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Pour la fonction $g(u) = (p + q + r)u^p u_x^q u_{3x}^r$ considérée lors de l'exemple précédent, $g[\lambda u] = (p + q + r)\lambda^{p+q+r}u^p u_x^q u_{3x}^r$ et donc

$$\mathcal{M}^{-1}g(u) \int_0^1 (p + q + r)\lambda^{p+q+r-1}u^p u_x^q u_{3x}^r = u^p u_x^q u_{3x}^r.$$

Pour une fonction f d'ordre M , l'opérateur de dérivée totale peut s'écrire de la façon suivante

$$D_x f = \sum_{i=0}^M u_{(i+1)x} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}} = u_x \frac{\partial f}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \dots + u_{(M+1)x} \frac{\partial f}{\partial u_{Mx}}.$$

On peut vérifier directement que les opérateurs \mathcal{M}^{-1} et D_x commutent. Nous sommes maintenant prêts à introduire l'opérateur d'homotopie.

Définition 5.6. *L'opérateur d'homotopie pour une fonction $u(x)$ est donné par*

$$\mathcal{H}_{u(x)} f = \int_0^1 (I_u f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (5.3)$$

avec

$$I_u f = \sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}}. \quad (5.4)$$

Cet opérateur est la clé pour intégrer les fonctions différentielles exactes. La preuve du prochain théorème justifie sa forme complexe.

Théorème 5.5. *Pour une fonction différentielle exacte f d'ordre M , c'est-à-dire que $\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)} f = 0$, alors la primitive F de f est donnée par*

$$F = D_x^{-1} f = \int f dx = \mathcal{H}_{u(x)} f.$$

Preuve : Pour démontrer ce résultat, on calcule tout d'abord $u\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}f$ et on intègre successivement par partie. Explicitement,

$$\begin{aligned}
u\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}f &= u \sum_{k=0}^M (-D_x)^k \frac{\partial f}{\partial u_{kx}}, \\
&= u \frac{\partial f}{\partial u} - D_x \left(u \sum_{k=1}^M (-D_x)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right) + u_x \sum_{k=1}^M (-D_x)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}}, \\
&= u \frac{\partial f}{\partial u} + u_x \frac{\partial f}{\partial u_x} - D_x \left(u \sum_{k=1}^M (-D_x)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right. \\
&\quad \left. + u_x \sum_{k=2}^M (-D_x)^{k-2} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right) + u_{xx} \sum_{k=2}^M (-D_x)^{k-2} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}}, \\
&= \dots, \\
&= u \frac{\partial f}{\partial u} + u_x \frac{\partial f}{\partial u_x} + \dots + u_{Mx} \frac{\partial f}{\partial u_{Mx}} - D_x \left(u \sum_{k=1}^M (-D_x)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right. \\
&\quad \left. + u_x \sum_{k=2}^M (-D_x)^{k-2} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} + \dots + u_{(M-1)x} \sum_{k=M}^M (-D_x)^{k-M} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right), \\
&= \sum_{i=0}^M u_{ix} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}} - D_x \left(\sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right), \\
&= \mathcal{M}f - D_x \left(\sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right),
\end{aligned}$$

puisque f est exacte, $\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}f = 0$ et nous trouvons alors que

$$\mathcal{M}f = D_x \left(\sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right).$$

En utilisant le fait que \mathcal{M}^{-1} et D_x commutent, on applique \mathcal{M}^{-1} et on trouve

$$f = D_x \left(\mathcal{M}^{-1} \sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right).$$

En appliquant D_x^{-1} et en utilisant l'équation (5.3), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
F &= D_x^{-1}f = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{M-1} u_{ix} \sum_{k=i+1}^M (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}} \right) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
&= \mathcal{H}_{u(x)}f.
\end{aligned}$$

Exemple 5.2 : L'opérateur d'homotopie. La fonction $f = 2u_x u_{xx} \cos(u) - u_x^3 \sin(u)$ est exacte, puisque

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{u(x)}^{(0)} f &= \frac{\partial f}{\partial u} - D_x \frac{\partial f}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial u_{xx}}, \\
 &= -2u_x u_{xx} \sin(u) - u_x^3 \cos(u) - D_x(2u_{xx} \cos(u) \\
 &\quad - 3u_x^2 \sin(u)) + D_x^2(2u_x \cos(u)), \\
 &= -2u_x u_{xx} \sin(u) - u_x^3 \cos(u) - (2u_{3x} \cos(u) - 8u_x u_{xx} \sin(u) \\
 &\quad - 3u_x^3 \cos(u)) + (2u_{3x} \cos(u) - 6u_x u_{xx} \sin(u) - 2u_x^3 \cos(u)) \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la fonction F telle que $f = D_x F$, on utilise le théorème précédent et l'opérateur d'homotopie avec $M = 2$. On calcule

$$\begin{aligned}
 I_u f &= \sum_{i=0}^1 u_{ix} \sum_{k=i+1}^2 (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}}, \\
 &= u \frac{\partial f}{\partial u_x} - u D_x \left(\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \right) + u_x \left(\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \right), \\
 &= u(2u_{xx} \cos(u) - 3u_x^2 \sin(u)) - u D_x(2u_x \cos(u)) + u_x(2u_x \cos(u)), \\
 &= -u u_x^2 \sin(u) + 2u_x^2 \cos(u).
 \end{aligned}$$

L'équation (5.3) donne alors

$$\begin{aligned}
 F &= \mathcal{H}_{u(x)} f = \int_0^1 (I_u f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
 &= \int_0^1 (-\lambda^2 u u_x^2 \sin(\lambda u) + 2\lambda u_x^2 \cos(\lambda u)) d\lambda, \\
 &= u_x^2 \cos(u),
 \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'intégrale de f .

Le plus grand avantage de cette approche est qu'elle permet de réduire un problème d'intégration complexe à une simple intégrale sur le paramètre λ qui n'apparaît que de façon polynômiale dans l'intégrale. L'application de l'opérateur d'homotopie n'implique alors que des dérivées successives et une intégrale très simple.

On peut encore exprimer l'opérateur d'homotopie sous une forme plus compacte. Pour ce faire, on introduit les opérateurs d'Euler d'ordre supérieur.

Définition 5.7. *Pour une fonction différentiable f , l'opérateur d'Euler d'ordre i est défini par*

$$\mathcal{L}_{u^\alpha(x)}^{(i)} f = \sum_{k=i}^{M(\alpha)} \binom{k}{i} (-D_x)^{k-i} \frac{\partial f}{\partial u_{kx}^\alpha}.$$

On peut donner la forme explicite de $\mathcal{L}_{u(x)}^{(1)}$ et $\mathcal{L}_{u(x)}^{(2)}$ dans le cas d'une seule fonction dépendant d'une seule variable indépendante.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u(x)}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial u_x} - 2D_x \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + 3D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{3x}} - 4D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{4x}} + \dots \\ \mathcal{L}_{u(x)}^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - 3D_x \frac{\partial}{\partial u_{3x}} + 6D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{4x}} - 10D_x^3 \frac{\partial}{\partial u_{5x}} + \dots \end{aligned}$$

Considérons un problème plus général impliquant plusieurs variables dépendantes $u(x) = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^q(x))$ ayant une seule variable indépendante.

Théorème 5.6. *Si f est une fonction différentiable de q variables dépendantes et une variable indépendante, l'opérateur d'homotopie est donné par*

$$H_{u(x)} f = \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^q (I_{u^\alpha} f) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda},$$

avec

$$I_{u^\alpha(x)} f = \sum_{j=0}^{M(\alpha)-1} D_{x^j} \left(u^\alpha \mathcal{L}_{u^\alpha(x)}^{(j+1)} f \right). \quad (5.5)$$

Ici, $M(\alpha)$ est l'ordre de u^α dans f et les opérateurs $\mathcal{L}_{u^\alpha(x)}^{(i+1)}$ sont les opérateurs d'Euler d'ordre supérieur. On peut montrer que les expressions (5.4) et (5.5) sont égales. La généralisation de ce formalisme aux problèmes multidimensionnels est directe, mais les preuves deviennent extrêmement fastidieuses. Pour ce faire, on doit utiliser les opérateurs d'Euler d'ordre supérieur en plusieurs dimensions. Par exemple, en deux

et trois dimensions, ceux-ci sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{u^\alpha(x,y)}^{(i_x,i_y)} &= \sum_{k_x=i_x}^{M_x(\alpha)} \sum_{k_y=i_y}^{M_y(\alpha)} \begin{pmatrix} k_x \\ i_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_y \\ i_y \end{pmatrix} (-D_x)^{k_x-i_x} (-D_y)^{k_y-i_y} \frac{\partial}{\partial u_{k_x k_y}^\alpha}, \\ \mathcal{L}_{u^\alpha(x,y,z)}^{(i_x,i_y,i_z)} &= \sum_{k_x=i_x}^{M_x(\alpha)} \sum_{k_y=i_y}^{M_y(\alpha)} \sum_{k_z=i_z}^{M_z(\alpha)} \begin{pmatrix} k_x \\ i_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_y \\ i_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_z \\ i_z \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot (-D_x)^{k_x-i_x} (-D_y)^{k_y-i_y} (-D_z)^{k_z-i_z} \frac{\partial}{\partial u_{k_x k_y k_z}^\alpha}.\end{aligned}$$

Pour une fonction f dépendant de p variables indépendantes, nous voulons déterminer un vecteur à p composantes F tel que $f = \text{Div} F$. Pour deux dimensions, l'opérateur d'homotopie est défini par ses composantes $(\mathcal{H}_{u(x,y)}^{(x)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y)}^{(y)}(f))$. La composante en x est donné par

$$\mathcal{H}_{u(x,y)}^{(x)}(f) = \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^q I_{u^\alpha}^{(x)}(f) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}$$

avec

$$I_{u^\alpha}^{(x)}(f) = \sum_{i_x=0}^{\infty} \sum_{i_y=0}^{\infty} \left(\frac{1+i_x}{1+i_x+i_y} \right) D_x^{i_x} D_y^{i_y} \left(u^\alpha \mathcal{L}_{u^\alpha(x,y)}^{(1+i_x,i_y)}(f) \right).$$

La composante en y est définie de façon symétrique. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 5.7. *Si f est une divergence, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_{u^\alpha(x,y)}^{(0,0)} f = 0$ pour $1 \leq j \leq q$, alors*

$$F = (F_1, F_2) = \text{Div}^{-1}(f) = (\mathcal{H}_{u(x,y)}^{(x)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y)}^{(y)}(f)).$$

Finalement, en trois dimensions, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(x)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(y)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(z)}(f))$. Similairement aux expressions précédentes, les composantes de \mathcal{H} sont définies par

$$\mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(x)}(f) = \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^q I_{u^\alpha}^{(x)}(f) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda},$$

avec

$$\begin{aligned}I_{u^\alpha}^{(x)}(f) &= \sum_{i_x=0}^{\infty} \sum_{i_y=0}^{\infty} \sum_{i_z=0}^{\infty} \left(\frac{1+i_x}{1+i_x+i_y+i_z} \right) \\ &\quad \cdot D_x^{i_x} D_y^{i_y} D_z^{i_z} \left(u^\alpha \mathcal{L}_{u^\alpha(x,y,z)}^{(1+i_x,i_y,i_z)}(f) \right).\end{aligned}$$

Théorème 5.8. *Si f est une divergence, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_{u^\alpha(x,y,z)}^{(0,0,0)} f = 0$ pour $1 \leq j \leq q$, alors*

$$\begin{aligned} F &= (F_1, F_2, F_3) = \text{Div}^{-1}(f), \\ &= (\mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(x)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(y)}(f), \mathcal{H}_{u(x,y,z)}^{(z)}(f)). \end{aligned}$$

Rappelons qu'une loi de conservation est une expressions du type

$$D_t \rho + \text{Div} J = 0.$$

La méthode proposée est une approche de force brute permettant d'intégrer complètement cette expression pour déterminer J lorsque ρ est donné et possède une forme particulière. À l'aide des outils que nous avons décrits, la recherche de lois de conservation pour un système d'équations différentielles peut être algorithmisée de la façon suivante.

1. Déterminer les changements d'échelle laissant invariant le système d'équations différentielles.
2. Postuler la densité conservée ρ comme une combinaison linéaire de monômes de rang uniforme, tels que définis précédemment. En pratique, on fixe une valeur particulière pour le rang et détermine tous les monômes admissibles possédant ce rang.
3. Calculer $-D_t \rho$ et appliquer les opérateurs d'Euler d'ordre 0 à $D_t \rho$ afin de déterminer la valeur des constantes assurant que $-D_t \rho$ s'exprime comme une divergence. Lors de cette étape, il est important de ne travailler que sur les solutions du système. Il convient donc d'isoler une variable dans chacune des équations du système et de substituer sa valeur ainsi que ses dérivées successives dans les expressions $\mathcal{L}_{u^\alpha(x^1, \dots, x^p)}^{(0, \dots, 0)} D_t \rho$.
4. Appliquer l'opérateur d'homotopie à $E = -D_t \rho$ pour obtenir J et déterminer les quantités conservées du système.

Il est à noter que le flux \vec{J} produit par cet algorithme contient un degré de liberté représenté par l'addition d'un terme de rotationnel.

Exemple 5.3 : L'équation Korteweg-de-Vries (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{3x} = 0.$$

Voici quelques lois de conservation pour KdV

$$D_t(u^3 - 3u_x^2) + D_x\left(\frac{3}{4}u^4 - 6uu_x^2 + 3u^2u_{xx} + 3u_{xx}^2 - 6u_xu_{3x}\right) = 0,$$

$$D_t(u) + D_x\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) = 0,$$

$$D_t(u^2) + D_x\left(\frac{2}{3}u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2\right) = 0.$$

Nous avons trouvé ces lois de conservation à l'aide de l'invariance sous dilatation que voici

$$(x, t, u) \rightarrow \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^3}, \lambda^2 u\right).$$

Exemple 5.4 : Les équations des vagues en eau peu profonde (SWW) en (2+1) dimensions. [35]

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla}(\theta h) - \frac{1}{2}h\vec{\nabla}\theta = 0,$$

$$\theta_t + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}\theta) = 0,$$

$$h_t + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}h) = 0,$$

où \vec{u} , θ et h dépendent de x, y, t . En terme de composantes, nous avons les équations suivantes

$$u_t + uu_x + vv_y - 2\Omega v + \frac{1}{2}h\theta_x + \theta h_x = 0,$$

$$v_t + uv_x + vv_y + 2\Omega u + \frac{1}{2}h\theta_y + \theta h_y = 0,$$

$$\theta_t + u\theta_x + v\theta_y = 0,$$

$$h_t + hu_x + uh_x + hv_y + vh_y = 0.$$

Les équations SWW sont invariantes sous la symétrie de dilatation

$$(x, y, t, u, v, h, \theta, \Omega) \rightarrow \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^b}, \lambda^{b-1}u, \lambda^{b-1}v, \lambda^a h, \lambda^{2b-a-2}\theta, \lambda^b \Omega \right),$$

où les poids $W(h) = a$ et $W(\Omega) = b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$).

Voici quelques-unes des paires densités-flux pour le système SWW

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= h, & J^{(1)} &= \begin{pmatrix} uh \\ vh \end{pmatrix}, \\ \rho^{(2)} &= h\theta, & J^{(2)} &= \begin{pmatrix} uh\theta \\ vh\theta \end{pmatrix}, \\ \rho^{(3)} &= h\theta^2, & J^{(3)} &= \begin{pmatrix} uh\theta^2 \\ vh\theta^2 \end{pmatrix}, \\ \rho^{(4)} &= (u^2 + v^2)h + h^2\theta, & J^{(4)} &= \begin{pmatrix} u^3h + uv^2h + 2uh^2\theta \\ v^3h + u^2vh + 2vh^2\theta \end{pmatrix}, \\ \rho^{(5)} &= v_x\theta - u_y\theta + 2\Omega\theta, & J^{(5)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4\Omega u\theta - 2uu_y\theta + 2uv_x\theta - h\theta\theta_y \\ 4\Omega v\theta + 2vv_x\theta - 2vu_y\theta + h\theta\theta_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3 Application à l'équation de Sine-Gordon

On propose d'appliquer cet algorithme à l'équation de Sine-Gordon en deux dimensions, fondamentale en géométrie différentielle et en physique, notamment dans la théorie des champs relativistes. Elle est donnée par

$$u_{tx} = \sin(u). \quad (5.6)$$

Tout d'abord, on recherche les changements d'échelle laissant l'équation (5.6) invariante. Sous la transformation $(t, x, u) \rightarrow (\lambda^{p_t}t, \lambda^{p_x}x, \lambda^{p_u}u)$, l'équation devient

$$\lambda^{p_u - p_t - p_x} u_{tx} = \sin(\lambda^{p_u} u).$$

Puisque

$$\sin(\lambda^{p_u} u) = \lambda^{p_u} u - \frac{(\lambda^{p_u} u)^3}{3!} + \frac{(\lambda^{p_u} u)^5}{5!} - \dots,$$

on voit immédiatement que nous devons avoir $p_u = 0$ et donc $p_t = -p_x$ pour que l'équation soit de rang uniforme. Nous utiliserons donc le changement d'échelle $(t, x, u) \rightarrow (\lambda t, \lambda^{-1} x, u)$. À titre d'illustration, considérons les densités polynômiales de rang 2. Les seuls monômes admissibles sont u_x^2 et u_{xx} . On proposera donc une densité conservée de la forme $\rho = c_1 u_x^2 + c_2 u_{xx}$. On calcule

$$\begin{aligned} E = -D_t \rho &= -2c_1 u_x u_{xt} - c_2 u_{xxt} = -2c_1 u_x \sin(u) - c_2 (\sin(u))_x, \\ &= -2c_1 u_x \sin(u) - c_2 \cos(u) u_x. \end{aligned}$$

L'application de l'opérateur d'Euler d'ordre 0 donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}(-D_t \rho) &= \frac{\partial(-2c_1 u_x \sin(u) - c_2 \cos(u) u_x)}{\partial u} \\ &\quad - D_x \frac{\partial(-2c_1 u_x \sin(u) - c_2 \cos(u) u_x)}{\partial u_x}, \\ &= -2c_1 u_x \cos(u) + c_2 u_x \sin(u) \\ &\quad + D_x(2c_1 \sin(u) + c_2 \cos(u)), \\ &= -2c_1 u_x \cos(u) + c_2 u_x \sin(u) \\ &\quad + 2c_1 u_x \cos(u) - c_2 u_x \sin(u), \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Donc, $D_t \rho$ s'exprime comme une divergence pour toutes valeurs de c_1 et c_2 . Supposons que l'intégration de $D_t \rho$ n'est pas triviale et que nous devons utiliser l'opérateur d'homotopie. On trouve d'après (5.4) ($M = 1$)

$$\begin{aligned} I_u(-D_t \rho) &= \sum_{i=0}^0 u_{ix} \sum_{k=i+1}^1 (-D_x)^{k-(i+1)} \frac{\partial(-2c_1 u_x \sin(u) - c_2 \cos(u) u_x)}{\partial u_{kx}}, \\ &= u(-D_x)^{1-1} \frac{\partial(-2c_1 u_x \sin(u) - c_2 \cos(u) u_x)}{\partial u_x}, \\ &= -u(2c_1 \sin(u) + c_2 \cos(u)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 J &= D_x^{-1}(-D_t \rho) = \int_0^1 (-u(2c_1 \sin(u) + c_2 \cos(u))) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\
 &= -u \int_0^1 (2c_1 \sin(\lambda u) + c_2 \cos(\lambda u)) d\lambda, \\
 &= -u \left[\frac{-2c_1 \cos(\lambda u)}{u} + \frac{c_2 \sin(\lambda u)}{u} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=1}, \\
 &= 2c_1 (\cos(u) - 1) - c_2 \sin(u).
 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc deux lois de conservation linéairement indépendantes, selon les valeurs de c_1 et c_2 ,

$$\begin{aligned}
 \rho^{(1)} &= u_x^2, & J^{(1)} &= 2(\cos(u) - 1), \\
 \rho^{(2)} &= u_{xx}, & J^{(2)} &= -\sin(u).
 \end{aligned}$$

On vérifie directement que ces valeurs définissent bien des lois de conservation pour l'équation de Sine-Gordon. En effet

$$\begin{aligned}
 D_t(u_x^2) + D_x(2(\cos(u) - 1)) &= 2u_x u_{xt} - 2u_x \sin(u), \\
 &= 2u_x \sin(u) - 2u_x \sin(u) \equiv 0, \\
 D_t(u_{xx}) + D_x(-\sin(u)) &= u_{xxt} - u_x \cos(u) = (\sin(u))_x - u_x \cos(u), \\
 &= u_x \cos(u) - u_x \cos(u) \equiv 0,
 \end{aligned}$$

lorsque $u_{xt} = u_{tx} = \sin(u)$. Évidemment, la constante (-1) dans $J^{(1)}$ est superflue et peut être omise. En considérant des rangs plus élevés, on peut trouver davantage de lois de conservation :

Rang	Densité conservée	Flux associé
2	$\rho^{(1)} = u_x^2$	$J^{(1)} = 2 \cos(u)$
2	$\rho^{(2)} = u_{xx}$	$J^{(2)} = -\sin(u)$
4	$\rho^{(3)} = u_x^4 - 4u_{xx}^2$	$J^{(3)} = 4u_x^2 \cos(u)$
6	$\rho^{(4)} = u_x^6 - 20u_x^2 u_{xx}^2 + 8u_{3x}^2$	$J^{(4)} = 6u_x^4 \cos(u) + 16u_x^2 u_{xx} \sin(u) - 8u_{xx}^2 \cos(u)$

TABLEAU 5.1 – Quelques exemples de lois de conservation pour Sine-Gordon

De plus, l'équation de Sine-Gordon est clairement invariante sous la symétrie discrète $t \leftrightarrow x$. On obtient alors deux fois plus de lois de conservation en interchangeant les variables x et t . Si $D_t(u_x^2) + D_x(2 \cos(u))$ est une loi de conservation, alors $D_x(u_t^2) + D_t(2 \cos(u))$ en est une également. Le tableau 5.1 fournit, en réalité, huit lois de conservation.

Afin d'obtenir des résultats encore plus percutants, Hereman et al. [56] introduisent un nouveau paramètre variable dans l'équation de Sine-Gordon. Ils utilisent les coordonnées dites du cône de lumière, dans lesquelles l'équation s'écrit sous la forme standard

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha \sin(u) \quad \Leftrightarrow \quad v = u_t, \quad v_t = u_{xx} + \alpha \sin(u), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

En effectuant la transformation $(t, x, u, v, \alpha) \rightarrow (\lambda^{p_t} t, \lambda^{p_x} x, \lambda^{p_u} u, \lambda^{p_v} v, \lambda^{p_\alpha} \alpha)$, on trouve

$$\lambda^{p_v} v = \lambda^{p_u - p_t} u, \quad \lambda^{p_v - p_t} v_t = \lambda^{2(p_u - p_x)} u_{xx} + \lambda^{p_\alpha} \alpha \sin(\lambda^{p_u} u).$$

Par le même argument que précédemment, on voit immédiatement que nous devons avoir $p_u = 0$. Donc,

$$p_v - p_t = -2p_x = p_\alpha$$

et en posant $p_x = p_t = -1$, on doit avoir $p_\alpha = 2$ et $p_v = 1$ pour que l'équation soit invariante. C'est donc dire que l'équation (5.7) est invariante sous la transformation

$$(t, x, u, v, \alpha) \rightarrow (\lambda^{-1}t, \lambda^{-1}x, u, \lambda v, \lambda^2\alpha).$$

Nous considérons les polynômes de rang uniforme égal à deux. La liste des monômes que nous utilisons est $\{\alpha, v^2, u_x^2, u_x v\}$. Évidemment, il existe beaucoup plus de monômes admissibles, mais on peut démontrer que tous les autres sont équivalents à un élément de cette liste. Puisque le poids de u est nul, on peut considérer une combinaison linéaire de la forme

$$\rho = \alpha h_1(u) + h_2(u)v^2 + h_3(u)u_x^2 + h_4(u)u_x v,$$

où les $h_i(u)$ sont des fonctions arbitraires de u à déterminer et qui n'affectent pas le rang de la densité conservée. On calcule maintenant la dérivée totale $D_t \rho$,

$$\begin{aligned} E = D_t \rho &= \frac{\partial \rho}{\partial u} u_t + \frac{\partial \rho}{\partial u_x} u_{xt} + \frac{\partial \rho}{\partial v} u_t \\ &= (h_1' v^2 + h_2' u_x^2 + h_3' u_x v) v + (2u_x h_2' + v h_3) v_x \\ &\quad + (2v h_1 + v_x h_3)(u_{xx} + \alpha \sin(u)). \end{aligned}$$

On remarque que nous avons éliminé toutes les dérivées par rapport à t en substituant à partir de l'équation originale, par exemple $u_t \rightarrow v$, etc. Ceci permet de traiter t comme un paramètre et de ramener le problème à une dimension. De plus, h_i' est la dérivée de h_i par rapport à u . On veut avoir que $E = D_t \rho = -\text{Div} J$, et donc E doit être exacte. On impose alors que $\mathcal{L}_{u(x)}^{(0)}(E) \equiv 0$ et $\mathcal{L}_{v(x)}^{(0)}(E) \equiv 0$. On doit séparer les résultats selon chacune des variables $\{v, v_x, u_{xx}\}$ et imposer que le coefficient de chacune des puissances de ces termes est nul. Les calculs sont relativement longs et nous fournissent un système d'équations différentielles linéaires.

$$\begin{aligned} h_2(u) - h_3(u) &= 0, & h_2'(u) &= 0, & h_3'(u) &= 0, & h_4'(u) &= 0, \\ h_2''(u) &= 0, & h_4''(u) &= 0, & 2h_2'(u) - h_3'(u) &= 0, \\ 2h_2''(u) - h_3''(u) &= 0, & h_1'(u) + 2h_2(u) \sin(u) &= 0, \\ h_1''(u) + 2h_2'(u) \sin(u) + 2h_2(u) \cos(u) &= 0. \end{aligned}$$

En solutionnant ce système,

$$h_1(u) = 2c_1 \cos(u) + c_3, \quad h_2(u) = h_3(u) = c_1, \quad h_4(u) = c_2, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

on obtient la densité conservée

$$\rho = c_1(2\alpha \cos(u) + v^2 + u_x^2) + c_2 u_x v + c_3 \alpha.$$

On veut maintenant trouver le flux J associé à cette densité. On doit donc appliquer l'opérateur d'homotopie à l'expression

$$-E = -D_t \rho = -c_1(2u_{xx}v + 2u_x v_x) - c_2(vv_x + u_x u_{xx} + \alpha u_x \sin(u)).$$

L'application des opérateurs d'Euler d'ordre supérieur permet de trouver

$$I_u(f) = -2c_1 u_x v - c_2(u_x^2 + \alpha u \sin(u)),$$

$$I_v(f) = -2c_1 u_x v - c_2 v^2.$$

On applique alors l'opérateur d'homotopie en deux variables dépendantes et une variable indépendante donnée en (5.3), ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{u(x)}(f) &= \int_0^1 (I_u(f) + I_v(f))[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ &= - \int_0^1 (4c_1 \lambda u_x v + c_2(\lambda u_x^2 + \alpha u \sin(\lambda u) + \lambda v^2)) d\lambda, \\ &= -c_1(2u_x v) - \frac{c_2}{2}(v^2 + u_x^2 - 2\alpha \cos(u)). \end{aligned}$$

Il est possible de considérer des valeurs de rangs supérieures à 2. Il paraît évident que ces calculs deviennent rapidement très longs. Toutefois, l'approche est toujours applicable et peut même être implantée dans des logiciels de calcul symbolique tels que Maple et Mathematica. L'introduction du paramètre α dans l'équation permet d'obtenir une classe plus riche de lois de conservation pour des versions plus générales de l'équation de Sine-Gordon.

5.4 Conclusions et Perspectives

La notion de groupe de symétrie d'un système d'équations différentielles a été formalisée mathématiquement par Sophus Lie au XIX^e siècle. Le théorème de Noether est un résultat fondamental en physique mathématique car il relie les concepts fondamentaux de symétrie et de quantité conservée dans un système physique. L'intuition existait quant à l'existence d'un lien entre ces idées provenant de deux mondes distincts qu'Emmy Noether a fusionnés d'une façon extrêmement élégante. Aujourd'hui, plusieurs chercheurs tentent d'établir de nouvelles généralisations du théorème de Noether, voir par exemple [71,78]. Souvent, ces généralisations fournissent de nouveaux résultats que pour certains systèmes particuliers.

Comme nous l'avons vu, le théorème de Noether possède des limitations importantes, la principale étant évidemment l'imposition que le système considéré doit être écrit sous une forme variationnelle. Ceci implique que l'on doit connaître son Lagrangien. Cela n'est pas facile et cette tâche peut être plus ardue que la recherche de lois de conservation. Puisque les lois de conservation nous renseignent directement sur le système physique considéré, il serait raisonnable de croire que la connaissance d'un certain nombre de ses lois nous aiderait à établir sa forme variationnelle. De plus, la connaissance d'une quantité suffisante de lois de conservation permet de caractériser la nature d'un système. Par exemple, l'existence d'une infinité de ces lois nous indique que le système est intégrable et qu'il est possible d'utiliser la méthode de diffusion inverse [2].

L'approche que nous avons privilégiée ici fait abstraction de ces limitations. Elle est en fait applicable à une très grande quantité de systèmes physiques, car il est habituellement facile de déterminer une transformation qui produira un système possédant une symétrie de changement d'échelle. Par exemple, c'est toujours le cas pour les systèmes quasilinéaires hyperboliques qui apparaissent en mécanique des fluides et

en théorie des champs. Cette méthode, très récente, procède par force brute et suggère d'intégrer complètement une expression de la forme $D_t \rho + \text{Div} J$ lorsque ρ est postulée. L'avantage de cette approche est qu'elle est totalement algorithmique, ce qui permet son implémentation dans des logiciels de calculs symboliques. À ce propos, mentionnons que l'introduction de ces nouvelles méthodes d'intégration, c'est-à-dire l'opérateur d'homotopie, est déjà amorcée et les logiciels pourront offrir des bibliothèques destinées à la recherche de lois de conservations, par exemple la bibliothèque Vessiot pour Maple [11].

Récemment, S. Anco et G. Bluman [9], [10] ont également proposé une nouvelle méthode directe de construction de lois de conservation n'utilisant pas le théorème de Noether. Celle-ci repose sur la recherche d'un facteur intégrant pour intégrer la loi de conservation et fournit des résultats intéressants.

Il est également possible d'utiliser le groupe de symétrie d'un système pour établir de nouvelles lois de conservation à partir de lois connues. Les transformations ponctuelles introduites à la section des groupes de symétries des équations différentielles représentent des transformations de l'espace $X \times U$ qui ne modifient pas l'espace solution. L'action du groupe de symétrie sur les lois de conservation ne fournit habituellement pas de nouveaux résultats. Dans [17], l'auteur détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe de symétrie fournisse de nouvelles lois de conservation à partir de lois connues. Ceci permet d'enrichir la classe de lois connues à partir de la connaissance de symétries du problème.

Notons que l'opérateur d'homotopie soulève tout de même certaines problématiques.

1. Mentionnons tout d'abord que, pour l'instant, on doit se limiter aux lois de conservation polynomiales qui ne dépendent pas explicitement des variables indépendantes. Il serait toutefois possible de considérer l'invariance sous d'autres

symétries plutôt que les changements d'échelle, par exemple les rotations ou les transformations galiléennes. Cela pourrait permettre l'étude des lois de conservations sous forme rationnelle. Cette piste est certes complexe et mérite certainement une attention particulière.

2. Remarquons également que l'opérateur d'homotopie fournit le flux J associé à ρ à un terme rotationnel près. En effet, nous savons que l'opérateur de divergence annule les termes provenant d'un rotationnel,

$$D_t \rho + \text{Div}(J + \nabla \times K) = D_t \rho + \text{Div}(J),$$

pour $K \in \mathbb{R}^p$. Il serait donc intéressant d'établir un algorithme permettant d'éliminer ces termes afin d'obtenir la forme la plus compacte possible.

Finalement, l'opérateur d'homotopie permet de supposer que l'on puisse construire une infinité de lois de conservation pour un système donné. Bien qu'il permette d'établir une grande quantité de lois de conservation pour un système donné et bien qu'il permette d'établir une grande quantité de lois impossibles à obtenir à l'aide du théorème de Noether, il arrive qu'après plusieurs applications le processus se stabilise. En effet, il peut arriver qu'à partir d'un certain rang, les lois de conservation que nous pouvons construire ne sont en fait que des conséquences différentielles de lois obtenues précédemment. Il serait alors intéressant de considérer des lois de conservation sous une forme autre que polynomiale.

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons discuté de trois formes possibles du problème linéaire spectral et leur condition de compatibilité correspondant à la représentation de courbure nulle :

1. Nous avons considéré séparément la représentation de courbure nulle écrite sous la forme AKNS (ou connue aussi comme ZS) pour les EDP. Dans ce cas, les matrices potentielles du PLS L et M dépendent des deux variables indépendantes $\{x_1, x_2\}$ et de fonctions dépendantes $\theta^k(x_1, x_2)$ et aussi d'un paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{C}$. La représentation de courbure nulle est équivalente au système d'EDP non-linéaires et prend la forme

$$\Omega[\theta] = D_{x_2} L([\theta], \lambda) - D_{x_1} M([\theta], \lambda) + [L([\theta], \lambda), M([\theta], \lambda)] = 0. \quad (6.1)$$

Nous le faisons sous l'hypothèse que l'équation (6.1) est indépendante du paramètre spectral $\lambda \in \mathbb{C}$.

2. La représentation de courbure nulle est décrite sous la forme de Lax pour une EDO. Dans ce cas, nous supposons que nous avons une seule variable indépendante $\{x\}$ et les variables dépendantes $\theta^k(x)$ dépendent de cette variable. Les matrices potentielles L, M sont des fonctions définies sur l'espace de Jet par

x et θ^k , de toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k et aussi dépendent du paramètre spectral λ , mais ne dépendent pas de la variable indépendante x_2 . La représentation de courbure nulle est équivalente à l'EDO et prend la forme

$$\Omega[\theta] = -D_{x_1}M([\theta], \lambda) + [L([\theta], \lambda), M([\theta], \lambda)] = 0.$$

Cette représentation de Lax peut être considérée comme la compatibilité d'un PLS où les matrices potentielles $L([\theta], \lambda)$ et $M([\theta], \lambda)$ prennent leurs valeurs dans une algèbre de Lie tandis que la fonction d'onde $\phi = \phi(\lambda, y, [\theta])$ prend ses valeurs dans le groupe de Lie correspondant. Ici, y est introduit comme une variable auxiliaire dans le PLS sous la forme

$$D_x\phi(\lambda, y, [\theta]) = L(\lambda, [\theta])\phi(\lambda, y, [\theta]),$$

$$D_y\phi(\lambda, y, [\theta]) = M(\lambda, [\theta])\phi(\lambda, y, [\theta]),$$

$$\text{où } \partial_y L = \partial_y M = 0.$$

3. La représentation de courbure nulle écrite sous la forme d'une courbure nulle pour les systèmes d'EDO. Nous supposons ici que la fonction dépendante $\theta^k(t)$ dépend d'une seule variable indépendante t . Les matrices sont des fonctions définies sur l'espace de Jet par t , $\theta^k(t)$ et toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k ainsi que d'une autre variable indépendante qui est le paramètre spectral λ . Dans ce cas-là, la représentation de courbure nulle est équivalente au système d'EDO

$$\Omega[\theta] = D_\lambda L(\lambda, [\theta]) - D_t M(\lambda, [\theta]) + [L(\lambda, [\theta]), M(\lambda, [\theta])],$$

où D_t et D_λ sont respectivement les dérivées totales par rapport à t et λ .

Nous avons démontré dans ce mémoire comment construire des surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie qui sont associées à trois formes de paires de Lax pour le cas des EDO et des EDP. Nous avons utilisé la RCN de type AKNS pour les équations différentielles partielles Sine-Gordon, Sinh-Gordon, Ernst, Bianchi et Schrödinger non-linéaire. Pour le deuxième cas, nous avons considéré les équations aux dérivées ordinaires, soit les équations différentielles associées aux fonctions elliptiques, par exemple Jacobi et \mathcal{P} -Weierstrass, pour les équations de Sturm-Liouville,

Riccati et Lamé. Les considérations théoriques pour le troisième cas sont illustrées via les surfaces associées à l'équation de Painlevé P1.

Nous considérons dans ce mémoire la forme générale des surfaces bidimensionnelles lisses plongées dans des algèbres de Lie pour lesquelles les équations de GMC sont équivalentes aux déformations infinitésimales pour la représentation de courbure nulle pour les équations différentielles considérées. Ces surfaces sont définies par leurs vecteurs tangents [Fokas-Gel'fand, 1996]

$$D_{x_1}F([\theta], \lambda) = \phi^{-1}A([\theta], \lambda)\phi, \quad D_{x_2}F([\theta], \lambda) = \phi^{-1}B([\theta], \lambda)\phi.$$

Cette surface $F \in \mathfrak{g}$ existe sous la condition que les matrices $A([\theta], \lambda)$ et $B([\theta], \lambda)$ soient linéairement indépendantes et qu'elles satisfassent l'équation

$$D_{x_2}A - D_{x_1}B + [A, M] + [L, B] = 0.$$

Il est démontré que ces déformations infinitésimales peuvent être construites par trois choix possibles de symétries,

$$F = \underbrace{\phi^{-1}\partial_\lambda\phi}_{\text{Sym-Tafel}} + \underbrace{\phi^{-1}S\phi}_{\text{Jauge}} + \underbrace{\phi^{-1}\text{pr}(\vec{v})\phi}_{\text{Symétrie généralisée}}$$

qui sont des symétries de la représentation de courbure nulle considérée comme une EDP (ou une EDO) en terme de variables matricielles L, M et qui obéissent

$$\Delta[u] = D_{x_2}L - D_{x_1}M + [L, M] = 0$$

ou bien par les symétries de l'équation différentielle elle-même $\Omega[\theta]$.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur la représentation de courbure nulle pour les équations suivantes :

- Les équations différentielles ordinaires ; associées aux fonctions elliptiques de Jacobi et de \mathcal{P} -Weierstrass, de Sturm-Liouville, de Lamé, de Riccati et de Painlevé P1,
- Les équations différentielles partielles ; de Sine-Gordon, de Sinh-Gordon, de Schrödinger non-linéaire, de Bianchi et de Ernst de la relativité générale.

Pour ces équations, nous avons discuté des caractéristiques géométriques des surfaces considérées à ces équations, comme

- Les deux premières formes fondamentales,
- Les courbures de Gauss et moyenne,
- Les points umbliques de la surface,
- La fonctionnelle de Willmore et la caractéristique de Euler-Poincaré,

associées aux surfaces pour la formule d'immersion de Sym-Tafel, pour la jauge et pour les symétries généralisées. Pour certains cas (Lamé, Jacobi et \mathcal{P} -Weierstrass), nous avons construit des surfaces solitoniques associées aux symétries spectrales, aux symétries de jauge ou encore aux symétries généralisées.

Plus particulièrement, nous avons construit de nouvelles surfaces solitoniques pour les équations différentielles elliptiques associées aux équations de Jacobi, soit cn et dn qui avec sn , étant déjà connues dans la littérature [50], forment les trois fonctions de base des 12 fonctions elliptiques de Jacobi. De plus, nous avons construit des surfaces pour les équations différentielles associées à la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass qui ne sont pas présentes dans la littérature. Nous avons fait de même pour l'équation de Lamé pour les trois types de symétries, c'est-à-dire conforme selon le paramètre spectral λ , de jauge et pour les symétries généralisées. Nous avons aussi trouvé une nouvelle paire de Lax pour l'équation de Ernst dans la base $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et nous avons construit sa surface. De plus, nous avons solutionné, pour certains ordres, l'équation de récurrence pour l'équation de Sine-Gordon et ainsi obtenu des symétries généralisées de cette dernière équation, puis construit ses surfaces.

6.1 Certaines perspectives futures

Nous énumérons ici, à titre d'exemples, certaines perspectives futures qui pourraient être envisagées.

1. Nous pouvons utiliser les surfaces des EDO pour approximer les surfaces des EDP, en utilisant les solutions invariantes de groupes des EDP. Nous pouvons étendre la solution générale de l'EDO près des invariants de groupes en faisant varier les paramètres.
2. Nous pouvons effectuer une analyse asymptotique des surfaces des EDP en utilisant les surfaces des EDO comme approximation.
3. Nous pouvons faire une analyse de la structure des singularités pour les équations différentielles considérées prises dans le contexte des points umbiliques ou dans le voisinage des singularités de la métrique induite.
4. Nous pouvons utiliser les opérateurs de récurrence de symétries généralisées pour obtenir les relations de récurrence entre les symétries associées à ces surfaces.
5. Nous pouvons faire l'étude de la manifestation (ou comment sont représentées) les caractéristiques intégrables, telles que la structure Hamiltonienne et les quantités préservées, sur les surfaces.
6. Nous pouvons utiliser le problème variationnel de certaines fonctions géométriques (interprétées comme la fonctionnelle d'action, par exemple l'action de Willmore) pour calculer les classes des équations du moment-énergie (Euler-Lagrange) qui sont déterminées par les équations de la surface. Cela correspond au cas où la nature d'un certain phénomène physique non-linéaire n'est pas bien établie, mais les surfaces associées sont connues. En utilisant le problème variationnel sur une surface, nous sommes en mesure de déterminer les équations d'Euler-Lagrange.

Annexe A

A.1 Matrices de Pauli et éléments de base pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$

À maintes reprises, nous utilisons l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , comme espace multidimensionnel pour plonger nos surfaces. Il est alors utile de bien définir une base possible pour cette algèbre, soit les matrices réelles de trace nulle

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et les matrices imaginaires de trace nulle

$$e_4 := ie_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 := ie_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 := ie_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

En considérant seulement les éléments $\{e_1, e_2, e_3\}$, nous recouvrons totalement l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et en considérant les six éléments $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, nous recouvrons l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Si nous considérons seulement les éléments matriciels qui ont la propriété

$$e_j^\dagger = -e_j, \tag{A.1}$$

alors nous retrouvons les matrices anti-hermitiennes, soit

$$i\sigma_1 := e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_2 := e_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_3 := e_6 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Ces matrices forment une base qui recouvre l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et où les matrices de Pauli ont aussi les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\sigma_i^\dagger &= \sigma_i, & \text{tr}(\sigma_i) &= 0, & \sigma_i \sigma_j &= \sum_k i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} I, \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= \sum_k 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k, & \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} I.\end{aligned}$$

A.2 Systèmes Hamiltoniens

Un system Hamiltonien est un système d'EDO pour les variables dépendantes (p, q) exprimées sous la forme

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

où $H = H(q, p; t)$ est une fonction des variables (q, p, t) , appelé l'Hamiltonien. Pour une solution arbitraire donnée $q = q(t)$, $p = p(t)$, nous définissons

$$h(t) = H(q(t), p(t); t)$$

en substituant la solution dans l'Hamiltonien. Calculons la dérivée de la fonction $h(t)$ par rapport à t , nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ici, $\partial/\partial t$ agit comme la dérivée partielle par rapport au temps en prenant (q, p, t) agissant comme des variables indépendantes ; quand nous utilisons d/dt , nous prenons q et p comme des fonctions du temps t . (Nous utilisons la notation dH/dt au lieu de dh/dt , à moins qu'une ambiguïté soit présente.) De ce calcul, nous voyons que la fonction $h(t)$ est une constante si $H = H(q, p; t)$ ne dépend pas explicitement

du temps. Dans ce cas, l'Hamiltonien H procure une première intégrale du système (A.2). Quand nous trouvons une première intégrale, dans un cas général, p peut être vu comme une fonction de q qui est défini implicitement par $H = c$. De là, le système original se réduit à une équation du premier ordre en q ; la fonction inconnue q doit être déterminée par quadrature.

Question : Comment écrire le système Hamiltonien défini par l'Hamiltonien $H = \frac{1}{2}p^2 - 2q^3 - aq$ $a \in \mathbb{C}$, puis comment le solutionner ?

Réponse : Le système Hamiltonien est donné par

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = 6q^2 + a.$$

En solutionnant l'équation algébrique $H = b$, ($b \in \mathbb{C}$) pour la variable inconnue p , nous obtenons $p = \sqrt{4q^3 + 2aq + 2b}$. Ainsi, l'équation différentielle qui doit être satisfaite par q est donnée par

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{4q^3 + aq + 2b}.$$

Toutefois, $q = q(t)$ est déterminée comme la fonction inverse de l'intégrale elliptique

$$t = F(q) = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{4q^3 + aq + b}}.$$

Clairement, cet exemple est équivalent à l'équation non-linéaire

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + a \quad (\text{A.2})$$

du second ordre pour $y = q$. Ceci nous rappelle l'équation différentielle de \mathcal{P} -Weierstrass, $\mathfrak{p}(t) = \mathfrak{p}(t; \omega_1, \omega_2)$

$$\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2 = 4(\mathfrak{p}(t))^3 - g_2\mathfrak{p}(t) - g_3.$$

En dérivant cette équation, nous obtenons

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} = 6(\mathfrak{p}(t))^2 - \frac{g_2}{2}.$$

En reparamétrisant les constantes d'une façon appropriée, nous voyons que la solution générale de l'équation (A.2) est donnée par

$$y(t) = \mathfrak{p}(t - c; \omega_1, \omega_2).$$

Les systèmes hamiltoniens qui proviennent du contexte des équations de Painlevé dépendent majoritairement explicitement de t , et de tels systèmes ne peuvent être intégrés par la méthode décrite ci-dessus. En fait, la première équation de Painlevé

$$P_I : \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 6y^2 + t$$

est celle que nous obtenons en remplaçant le paramètre a dans (A.2) par la variable indépendante t . Cette équation peut aussi être écrite comme le système Hamiltonien

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = 6q^2 + t,$$

avec l'Hamiltonien $H = \frac{1}{2}p^2 - 2q^3 - tq$. Il est connu, toutefois, que la première équation de Painlevé est une équation transcendente qui ne peut être intégrée.

En généralisant la situation, un système Hamiltonien à n degrés de liberté peut être défini comme un système d'équations différentielles sous la forme

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{A.3})$$

pour $2n$ variables dépendantes $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, où l'Hamiltonien $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n; t)$ est une fonction en terme des variables $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ et t . Lorsque nous parlons d'un système Hamiltonien avec plusieurs variables t_1, \dots, t_m , nous utilisons les Hamiltoniens H_1, \dots, H_m au même nombre que les variables de temps, et nous considérons simultanément le système Hamiltonien (A.3) pour toutes les variables t_j qui correspondent à l'Hamiltonien H_j .

A.3 Structure poissonienne et transformation canonique

Quand ϕ et ψ sont fonctions de (q, p, t) , nous définissons les crochets de Poisson $\{\phi, \psi\}$ par

$$\{\phi, \psi\} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p}.$$

Si les variables q, p appartiennent à un système Hamiltonien avec l'Hamiltonien $H = H(q, p; t)$, alors nous avons

$$\phi' = \{H, \phi\} + \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right),$$

pour n'importe quelle fonction $\phi = \phi(q, p; t)$ de (q, p, t) . Considérons un système de coordonnées (λ, μ, s) pour l'espace (q, p, t) tel que $\{\mu, \lambda\} = 1$ et $s = t$. Si nous transformons le système Hamiltonien par une telle transformation canonique, du moins localement l'équation transformée peut être exprimée encore comme un système Hamiltonien. Maintenant, nous expliquons comment c'est possible. Définissons

$$\lambda' = \{H, \lambda\} + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \mu' = \{H, \mu\} + \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

et essayons de trouver une fonction f telle que

$$\{f, \lambda\} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \{f, \mu\} = \frac{\partial \mu}{\partial t}. \quad (\text{A.4})$$

Avec une telle fonction f , définissons $K = H + f$, nous obtenons un système Hamiltonien

$$\lambda' = \{K, \lambda\} = \frac{\partial K}{\partial \mu}, \quad \mu' = \{K, \mu\} = -\frac{\partial K}{\partial \lambda},$$

avec l'Hamiltonien K . Premièrement, nous récrivons (A.4) sous la forme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{bmatrix},$$

par la suite, nous multiplions cette égalité par le déterminant Jacobien pour obtenir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial q} & \frac{\partial \mu}{\partial q} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p} & \frac{\partial \mu}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

En représentant le côté droit de l'équation par $[u, v]^t$, nous devons prouver que $\partial u / \partial p = \partial v / \partial q$ dans le but de garantir l'existence locale de f . Ceci est démontré par le calcul

$$\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial \lambda}{\partial q} - \frac{\partial \mu}{\partial q} \frac{\partial \lambda}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \{\mu, \lambda\} = 0.$$

Nous remarquons que les crochets de Poisson ont les propriétés fondamentales suivantes :

1. Le crochet $\{ , \}$ est bilinéaire et anti-symétrique :

$$\{f, f\} = 0, \quad \{g, f\} = -\{f, g\}.$$

2. Le crochet $\{ , \}$ satisfait la loi de Leibniz dans chacun des deux arguments :

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}, \quad \{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$$

3. Le crochet $\{ , \}$ satisfait la loi de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

A.4 Équation de Riccati

Considérons une EDO

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \quad (a(t) \neq 0), \quad (\text{A.5})$$

qui requiert que la dérivée de $y = y(t)$ soit exprimée comme une fonction quadratique de y comportant des fonctions connues comme coefficients. Une EDO de première

ordre de cette forme est appelée l'équation de Riccati. Nous introduisons une nouvelle variable dépendante $u = u(t)$ en la définissant par

$$y = -\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \ln u = -\frac{1}{a(t)} \frac{u'}{u}. \quad (\text{A.6})$$

Alors, l'équation différentielle qui doit être satisfaite est de la forme

$$u'' - \left(\frac{a'(t)}{a(t)} + b(t) \right) u' + a(t)c(t)u = 0. \quad (\text{A.7})$$

Nous pouvons voir que u est déterminé par une équation différentielle linéaire du second ordre. Nous prenons alors deux solutions indépendantes $\phi_0(t), \phi_1(t)$ de (A.7), et établissons

$$u(t) = c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1, \quad (c_0, c_1 \in \mathbb{C}).$$

De là, nous obtenons une famille de solutions

$$\phi(t; c_0, c_1) = -\frac{1}{a(t)} \frac{c_0 \phi'_0 + c_1 \phi'_1}{c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1}$$

de l'équation de Riccati (A.5). Puisque la fonction $\phi(t; c_0, c_1)$ est déterminée par le ratio de c_0 et c_1 , cette famille de solution est paramétrisée par l'espace projectif unidimensionnel \mathbb{P}^1 avec des coordonnées homogènes $[c_0 : c_1]$.

Cet argument peut être résumé comme suit. Par la transformation (A.6), l'équation de Riccati (A.5) est linéarisée en l'équation différentielle linéaire (A.7) du second ordre. Il en résulte que l'équation de Riccati a une famille de solutions unidimensionnelle paramétrisée par \mathbb{P}^1 . Il est raisonnable de considérer que toutes les solutions de l'équation de Riccati s'obtiennent de cette façon.

A.5 Douze fonctions elliptiques de Jacobi

Il y a douze fonctions elliptiques de Jacobi (pour des exemples, voir Gradshteyn et Ryzhik (1965) [46] ou Abramovitz et Stegun (1970) [6]). Nous introduisons un nom

générique $E = E(u) = E(u, k)$ pour elles, où u est l'argument variable et où k est le paramètre. Ces fonctions sont solutions de l'équation différentielle non-linéaire

$$E'' + aE + bE^3 = 0,$$

où le prime signifie d/du et où $a = a(k)$ et $b = b(k)$ sont des constantes qui dépendent du paramètre k . E satisfait aussi

$$(E')^2 + aE^2 + \frac{1}{2}bE^4 = c.$$

Les constantes a, b et c pour les douze fonctions elliptiques sont comme suit : Il y a

E	a	b	c
sn	$1 + k^2$	$2k^2$	$1 - k^2$
cn	$1 - 2k^2$	$2k^2$	$1 - k^2$
dn	$-(2 - k^2)$	2	$-(1 - k^2)$
ns	$1 + k^2$	-2	k^2
nc	$1 - 2k^2$	$-2(1 - k^2)$	$-k^2$
nd	$-(2 - k^2)$	$2(1 - k^2)$	-1
sc	$-(2 - k^2)$	$-2(1 - k^2)$	1
sd	$1 - 2k^2$	$2k^2(1 - k^2)$	1
cs	$-(2 - k^2)$	-2	$1 - k^2$
cd	$1 + k^2$	$-2k^2$	1
ds	$1 - 2k^2$	-2	$-k^2(1 - k^2)$
dc	$1 + k^2$	-2	k^2

TABLEAU A.1 – Solutions des équations différentielles elliptiques associées aux fonctions de Jacobi (elliptiques)

trois fonctions elliptiques de Jacobi de base,

$$\begin{aligned} - \operatorname{sn}(x, k) &\equiv \sin(\phi), \\ - \operatorname{cn}(x, k) &\equiv \cos(\phi), \\ - \operatorname{dn}(x, k) &\equiv \frac{d\phi}{du} = (1 - k^2 \sin^2(\phi))^{1/2}, \end{aligned}$$

où ϕ est implicitement défini par l'intégrale elliptique de premier ordre,

$$u = \int_0^\phi dt (1 - k^2 \sin^2(t))^{-1/2}.$$

À partir des définitions ci-haut, nous pouvons voir immédiatement que

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{cd}(u, k), & \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) &= -\operatorname{sd}(u, k), \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) &= -k^2 \operatorname{sc}(u, k). \end{aligned}$$

$$\operatorname{sn}^2(u, k) = 1 - \operatorname{cn}^2(u, k) = (1 - \operatorname{dn}^2(u, k))/k^2,$$

$$\operatorname{cn}^2(u, k) = (1 - 1/k^2) + \operatorname{dn}^2(u, k)/k^2,$$

$$\operatorname{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = (1 - k^2) + k^2 \operatorname{cn}^2(u, k).$$

Les constantes a, b et c ci-dessus peuvent être facilement calculées par ces résultats.

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont des fonctions doublement périodiques de l'argument complexe u . Spécifiquement,

$$\begin{aligned} - \operatorname{sn}(u + 4mK + 2inK') &= \operatorname{sn}(u), \\ - \operatorname{cn}(u + 4mK + 2n(K + iK')) &= \operatorname{cn}(u), \\ - \operatorname{dn}(u + 2mK + 4inK') &= \operatorname{dn}(u), \end{aligned}$$

où m et n sont des entiers et où

$$\begin{aligned} K &= K(k) = \int_0^{\pi/2} dt (1 - k^2 \sin^2(t))^{-1/2}, \\ K' &= K'(k) = K(k'); k' = (1 - k^2)^{1/2} \end{aligned}$$

sont des intégrales elliptiques complètes. En restreignant u à être réel, nous voyons que $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$ et $\text{dn}(u, k)$ ont des périodes $4K$, $4K$ et $2K$ respectivement. La période la plus courte correspond à $k = 0$, quand $K(0) = \pi/2$ et

$$\text{sn}(u, 0) = \sin(u), \quad \text{cn}(u, 0) = \cos(u), \quad \text{dn}(u, 0) = 1.$$

Dans le cas limite avec une période infinie, $K(\infty) = \infty$, nous avons

$$\text{sn}(u, \infty) = \tanh(u), \quad \text{cn}(u, \infty) = \text{dn}(u, \infty) = 1/\cosh(u).$$

Les fonctions de base $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$ et $\text{dn}(u, k)$ sont finies sur tout l'axe des réels de u et elles ont les zéros suivants sur cet axe :

- $\text{sn}(u, k) = 0$ quand $u = 2mK$,
- $\text{cn}(u, k) = 0$ quand $u = (2m + 1)K$,
- $\text{dn}(u, k) \neq 0$ pour $k < 1$.

où m est n'importe quel entier. C'est seulement pour le paramètre $k = 1$ que $\text{dn}(u, k)$ a des zéros sur l'axe des réels, notamment à $u = \pm\infty$.

Les transformations imaginaires de Jacobi

- $\text{sn}(iu, k) = i \text{sc}(u, k')$,
- $\text{cn}(iu, k) = \text{nc}(u, k')$,
- $\text{dn}(iu, k) = \text{dc}(u, k')$

permettent de passer d'arguments réels à des arguments imaginaires ou l'inverse.

Comme un exemple de l'utilisation des fonctions elliptiques, nous considérons l'équation statique de mouvement de la théorie ϕ^4 avec une brisure spontanée de symétrie,

$$\phi''(x) + m^2\phi(x) - \lambda\phi^3(x) = 0.$$

Une solution de cette équation est

$$\phi = (m/\sqrt{\lambda})(-b/a)^{1/2}E(mx/\sqrt{a}, k),$$

où E est n'importe laquelle des douze fonctions elliptiques. En choisissant $E = \text{sn}$ et en fixant le paramètre $k = 1$, nous trouvons la bien connue « kink solution »

$$\phi = (m/\sqrt{\lambda}) \tanh(mx/\sqrt{2}).$$

A.5.1 Propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi

Les douze fonctions elliptiques de Jacobi sont des solutions des équations différentielles du type

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = ay^4 + by^2 + c,$$

où a, b, c sont des constantes définies par un paramètre k (ce paramètre k est le module).

Nous avons la relation entre u et y , soit

$$u = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{c + bt^2 + at^4}}.$$

Nous savons que les fonctions elliptiques de Jacobi ont les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \text{sn}(u) &= \text{cn}(u) \text{dn}(u), \\ \frac{d}{du} \text{cn}(u) &= -\text{sn}(u) \text{dn}(u), \\ \frac{d}{du} \text{dn}(u) &= -k^2 \text{sn}(u) \text{cn}(u). \end{aligned}$$

De plus, elles ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) &= 1, \\ k^2 \text{sn}^2(u) + \text{dn}^2(u) &= 1, \\ \text{cn}(0) = \text{dn}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Une notation abrégée et appropriée a été inventée par Glaisher pour exprimer les réciproques et les quotients des fonctions elliptiques de Jacobi. Les réciproques sont dénotées en réversant l'ordre des lettres, et s'expriment de la façon suivante

$$\operatorname{ns}(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}(u)}, \quad \operatorname{nc}(u) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u)}, \quad \operatorname{nd}(u) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u)}.$$

Pour ce qui est des quotients, nous écrivons

$$\begin{aligned} \operatorname{sc}(u) &= \frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}, & \operatorname{sd}(u) &= \frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, & \operatorname{cd}(u) &= \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \\ \operatorname{cs}(u) &= \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}, & \operatorname{ds}(u) &= \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}, & \operatorname{dc}(u) &= \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}. \end{aligned}$$

A.5.2 Théorème d'addition des fonctions elliptiques de Jacobi

Supposons que u et v varient pendant que $u + v$ reste constant et égal à α , tel que

$$\frac{dv}{du} = -1.$$

Maintenant, introduisons, comme nouvelles variables, s_1 et s_2 définies par les équations

$$\begin{aligned} s_1 &= \operatorname{sn}(u), \\ s_2 &= \operatorname{sn}(v), \\ \dot{s}_1^2 &= (1 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2), \\ \dot{s}_2^2 &= (1 - s_2^2)(1 - k^2 s_2^2). \end{aligned}$$

En différentiant par rapport à u et en divisant par $2s_1$ et $2s_2$ respectivement, nous trouvons pour des valeurs générales de u et v

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -(1 + k^2)s_1 + 2k^2 s_1^3, \\ \ddot{s}_2 &= -(1 + k^2)s_2 + 2k^2 s_2^3. \end{aligned}$$

À partir d'algèbre simple, nous pouvons trouver que

$$\frac{\ddot{s}_1 s_2 - \ddot{s}_2 s_1}{\dot{s}_1^2 s_2^2 - \dot{s}_2^2 s_1^2} = \frac{-2k^2 s_1 s_2}{1 - k^2 s_1^2 s_1^2},$$

alors

$$(\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1)^{-1} \frac{d}{du} (\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1) = (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^{-1} \frac{d}{du} (1 - k^2 s_1^2 s_2^2),$$

en intégrant cette équation, nous obtenons

$$\frac{\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = C,$$

où C est la constante d'intégration.

En remplaçant les expressions de gauche par leur valeur en terme de u et v , nous avons

$$\frac{\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(v) + \text{cn}(v)\text{dn}(v)\text{sn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)} = C.$$

Il est à noter que nous avons deux intégrales pour l'équation $du + dv = 0$, soit $u + v = \alpha$ et

$$\frac{\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(v) + \text{cn}(v)\text{dn}(v)\text{sn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)} = C,$$

chaque intégrale impliquant une constante arbitraire. Par la théorie générale des équations différentielles du premier ordre, ces intégrales ne peuvent être fonctionnellement indépendantes, mais aussi

$$\frac{\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(v) + \text{cn}(v)\text{dn}(v)\text{sn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)}$$

peut être exprimée comme une fonction de $u + v$; appelons-la $f(u, v)$.

En égalant $v = 0$, nous voyons que $f(u) = \text{sn}(u)$, et alors la fonction f est la fonction sn . Nous avons donc démontré le résultat suivant

$$\text{sn}(u + v) = \frac{\text{sn}(u)\text{cn}(v)\text{dn}(v) + \text{sn}(v)\text{cn}(u)\text{dn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)}$$

qui est le théorème d'addition.

Nous pouvons facilement déduire la formule de duplication, soit $u = v$

$$\text{sn}(u + u) = \frac{\text{sn}(u)\text{cn}(u)\text{dn}(u) + \text{sn}(u)\text{cn}(u)\text{dn}(u)}{1 - k^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(u)},$$

$$\operatorname{sn}(2u) = \frac{2\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)}.$$

Nous pouvons trouver similairement pour les fonctions cn et dn que

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) - k^2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)}.$$

Pour les théorèmes de duplications, nous avons

$$\operatorname{cn}(2u) = \frac{\operatorname{cn}^2(u) - \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{dn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)},$$

$$\operatorname{dn}(2u) = \frac{\operatorname{dn}^2(u) - \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)}.$$

A.6 Théorème d'addition de la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass

Le théorème d'addition pour la fonction de \mathcal{P} -Weierstrass nous permet d'exprimer explicitement $\mathfrak{p}(x+y)$ en terme de fonctions de \mathcal{P} -Weierstrass de z et de y .

$$\mathfrak{p}(z+y) = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathfrak{p}'(z) - \mathfrak{p}'(y)}{\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(y)} \right)^2 - \mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(y).$$

La formule de duplication est donnée par

$$\mathfrak{p}(2z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathfrak{p}''(z)}{\mathfrak{p}'(z)} \right)^2 - 2\mathfrak{p}(z),$$

quand

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}''(t) &= 6\mathfrak{p}(t) - \frac{g_2}{2}, \\ \left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \right)^2 &= 4\mathfrak{p}^3(t) - g_2\mathfrak{p}(t) - g_3, \end{aligned}$$

où ici, t agit comme z ou y .

À partir du théorème d'addition, le résultat suivant tient.

$$\mathfrak{p}(z+y) + \mathfrak{p}(z-y) = \frac{[2\mathfrak{p}(z)\mathfrak{p}(y) - \frac{1}{2}g_2]}{[\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{p}(y)]^2} \cdot [\mathfrak{p}(z) + \mathfrak{p}(y) - g_3] .$$

Bibliographie

1. ABLOWITZ, M.J., CHAKRAVARTY, S. et HALBURD, R.G. (2003). *Integrable Systems and Reductions of Self-Dual Yang-Mills equations*, J. Math. Phys. **44** 8, 3147-3173.
2. ABLOWITZ, M.J. et CLARKSON, P.A. (1991). *Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
3. ABLOWITZ, M.J., KAUP, D.J., NEWELL, A.C. et SEGUR, H. (1973). *Nonlinear evolution equation of physical significance*, Phys. Rev. Lett. **31**, 125-127.
4. ABLOWITZ, M.J., KAUP, D.J., NEWELL, A.C. et SEGUR, H. (1974). *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math. **53**, 249-338.
5. ABLOWITZ, M.J. et SEGUR, H. (1981). *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia.
6. ABRAMOWITZ, M et STEGUN, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*, Milton Abramowitz and Irene A. Stegun edition, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series **55**.
7. ACTOR, A. (1979). *Classical solutions of $SU(2)$ Yang-Mills theories*, Reviews of Modern Physics **51** 3.
8. AMIT, D.J. (1978). *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific Publishing Company Inc., New York.
9. ANCO, S.C. et BLUMAN, G. (2001). *Direct Construction Method for Conserva-*

- tion Laws of Partial Differential Equations, Part I : Examples of Conservation Law Classifications*, Euro. J. Appl. Math. **13**, 545-566.
10. ANCO, S.C. et BLUMAN, G. (2002). *Direct Construction Method for Conservation Laws of Partial Differential Equations, Part II : General Treatment*, Euro. J. Appl. Math. **13** 5, 567-585.
 11. ANDERSON, I.M. (2004). *The Vessiot Package*, Département de Mathématiques, Utah State University, Logan Utah, 253 pages.
http://www.math.usu.edu/fg_mp/Pages/SymbolicsPage/VessiotDownloads.html
 12. ANDERSON, R.L. , HARNARD, J. et WINTERNITZ, P. (1982). *Systems of ordinary differential equations with nonlinear superposition principles*, Physica D **4** 2, 164-182.
 13. ARNOLD, V.I. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics, vol. 60 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York . Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, corrected reprint of the second (1989) edition.
 14. ASANO, N., TANIUTI, T. et YAJIMA, N. (1969). *Perturbation method for nonlinear wave modulation : II*, J. Math. Phys. **10**, 2020-2024.
 15. BARRETT, J. et al. (1994). *Kleinian Geometry and N=2 Superstring*, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 1457-1493.
 16. BASPALOVAND, V.I. et TALANOV, V.I. (1966). *Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids*, JETP Engl. Transl. **3**, 307-310.
 17. BLUMAN, G. (2005). *Connections between symmetries and conservation laws*, SIGMA, **1**, Paper 011, 16 pages.
<http://www.emis.de/journals/SIGMA/2005/Paper011/sigma05-011.pdf>
 18. BOBENKO, A.I. (1994). *Surfaces in terms of 2×2 matrices. Old and new integrable cases*. dans : *Harmonic Maps and Integrable Systems*, A.P. Fordy and J.C. Wood edition, Vieweg.
 19. BYRD, P. et FRIEDMAN, M. (1971). *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, New York : Springer-Verlag.

20. CHAVOLIN, J., JOANNY, J.F. et ZINN-JUSTIN, Y. (1989). *Liquids at Interfaces*, Elsevier, Amsterdam.
21. CHEN, D.Y. (2006). *Introduction to Solitons Theory*, Science Press, Beijing.
22. CHEN, H.H. et LIU, C.S. (1978). *Nonlinear wave and soliton propagation in media with arbitrary inhomogeneities*, Phys. Fluids **21**, 377-380.
23. CIESLINSKI, J. (1997). *A generalized formula for integrable classes of surfaces in Lie algebras*, Journal of Mathematical Physics **38**, p.4255-4272
24. CONTE, R. (1989). *Invariant Painlevé analysis of partial differential equations*, Phys. Lett. A **140**, 383-390.
25. CONTE, R. (1990). *Painlevé singular manifold equation and integrability, Inverse methods in action*, 497-504, édition P.C. Sabatier, Springer-Verlag series "Inverse problems and theoretical imaging", Springer-Verlag, Berlin.
26. CONTE, R. (1999). *The Painlevé Property : One century Later*, Robert Conte Editor, Springer, CRM series in Mathematical Physics, New York.
27. CONTE, R. et MUSETTE, M. (1992). *Link between solitary waves and projective Riccati equations*, J. Phys. A **25**, 5609-5623.
28. DARBOUX, G. (1882). *Sur une proposition relative aux équations linéaires*, C. R. Acad. Sc., Paris, **94**, 1456-1459.
29. DARBOUX, G. (1894). *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, vol. III, Gauthier-Villars, Paris. Réimprimé, *Théorie générale des surfaces*, Chelsea, New York, 1972.
30. Da RIOS, L.S. (1906). *Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso*, Rend. Circ. Mat. Palermo **22**, 117-135.
31. DAVEY, A. (1972). *The propagation of a weak nonlinear wave*, J. Fluid. Mech. **53** 4, 769-781.
32. DAVID, F., GINSPIRG, P. et ZINN-JUSTIN, Y. (éditeurs, 1996). *Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory*, Elsevier, Amsterdam.
33. DAVYDOV, A.S. (1991). *Solitons in Molecular Systems*, Springer, New York.

34. de GENNES, P.G. (1966). *Superconductivity of Metals and Alloys*, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
35. DELLAR, P. (2003). *Common Hamiltonian structure of the shallow water equations with horizontal temperature gradient and magnetic fields*, Phys. Fluids **15**, 292-297.
36. DOLIWA, A. et SYM, A. (1992). *Constant mean curvature surfaces in E^3 as an exemple of soliton surfaces. Nonlinear Evolution Equation and Dynamical Systems*, Editeurs M. Boiti, L. Martina et F. Pampinelli, Singapore, World Scientific, p.111-117.
37. ENNEPER, A. (1868). *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, Königl. Gesell. Wissensch. Georg-Augustus-Univ. Göttingen **12**, 258.
38. FOKAS, A. S. et GEL'FAND, I. M. (1996). *Surfaces on Lie groups, on Lie algebras and their integrability*, Comm. Math. Phys. **177** p. 203-220.
39. FOKAS, A. S, GEL'FAND, I. M, FINKEL F. et LIU, Q. M. (2000). *A formula for constructing infinitely many surfaces on Lie algebras and integrable equations*. Sel. Math. **6** 4, p.347-375.
40. FOKAS, A. S. et LIU, Q.-M. (1994). *Nonlinear interaction of traveling waves of non-integrable equations*, Phys. Rev. Lett. **72** 21, 3293-3296.
41. FREEMAN, N.C. (1984). *Soliton Solutions of Non-linear Evolution Equations*, IMA J. Appl. Math. **32**, 125.
42. FREEMAN, N.C. et NIMMO, J.J.C. (1983). *A method of obtaining the N-soliton solution of the Boussinesq equation in terms of a wronskian*, Phys. Lett. A **95** 1.
43. FRIEDLAND B.D. et ICHIKAWA, Y.H. (1972). *On the nonlinear Schrödinger equation for Langmuir waves*, J. Phys. Soc. Japan **34**, 789-792.
44. GOURSAT, E. (1889). *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (3), **6** 9.
45. GOURSAT, E. (1924). *Cours d'analyse mathématique*, Gauthier-Villars, Paris.

46. GRADSHTEYN, I. S. et RYZHIK, I. M. (1966). *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.
47. GROSS, D.J., PIRAN, T. et WEINBERG, S. (1992). *Two-Dimensionnal Quantum Gravity and Ramdom Surfaces*, World Scientific, Singapore.
48. GRUNDLAND, A. M et RIGLIONI, D. (2013). *Strum-Liouville problems as generators of integrable nonlinear ODEs*, CRM Pre-print.
49. GRUNDLAND, A. M. et POST, S. (2011). *Soliton surfaces associated with generalized symmetries of integrable equations*, J. Phys. A. : Math. Theor. **44**, 165203.
50. GRUNDLAND, A.M. et POST, S. (2011). *Soliton surfaces associated with symmetries of EDOs written in Lax representation*, Conf. Ser. **343**, 012044.
51. GRUNDLAND, A. M. et POST, S. (2012). *Soliton surfaces vai a zero-curvature representation of differential equations*, J. Phys. A. **45**, 115204.
52. GRUNDLAND, A. M. et POST, S. (2012). *Surfaces immersed in Lie algebras associated with elliptic integral*, J. Phys. A. **45**, 015204.
53. HASEGAWA, A. et TAPPERT, F. (1973). *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers : I. Anomolous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23** 3, 142-144.
54. HASIMOTO, H. et ONO, H. (1972). *Nonlinear modulation of gravity waves*, J. Math. Soc. Japan **33**, 805-811.
55. HEREMAN, W. (2006). *Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differantial equations in multi-dimensions*, International Journal of Quantum chemistry, **106** 1, pp.278-299.
56. HEREMAN, W. et al. (2005). *Continuous and Discrete Homotopy Operators and the Computation of Conservation Laws, Differential Equations with Symbolic Computation*, édition D. Wang and Z.Zheng, World Scientific Publishing Compagny, Singapour.
57. HEREMAN, W., DECONICK, B. et POOLE, L.D. (2007). *Continuous and discrete homotopy operator : A theorical approach made concrete*, Mathematics and

- computers in simulation **74** (4-5), pp. 352-360.
58. HIROTA, R. (1971). *Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, Phys. Rev. Lett. **27**, 1192-1194.
 59. ICHIKAWA, Y.H., IMAMURA, T. et TANUITI, T. (1972). *Nonlinear wave modulation in collisionless plasma*, J. Phys. Soc. Japan **33**, 189-197.
 60. INCE, E.L. (1956). *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York.
 61. JIMBO, M. et MIWA, T. (1983). *Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras*, RIMS, Kyoto Univ. **19**.
 62. KARPMANAND, V.I. et KRUSKAL, E.M. (1969). *Modulated waves in nonlinear dispersive media*, Sov. Phys. JETP **28**, 277-281.
 63. KELLEY, P.L. (1965). *Self focussing of optic beams*, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005-1008.
 64. KITAEV, A.V. et LAW, C.K. (1994). *Rational Solutions of the Fifth Painlevé*, Differential and Integral Equation, **7** 4, p. 967-1000
 65. KONOPELCHENKO, B. et LANDOLFFI, G. (1997). *On Classical String Configuration*, Modrn. Phys. Lett. **12**, 3161-3168.
 66. KORTEWEG, D.J. et de VRIES, G. (1895). *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. Ser. 5 **39**, 422-443
 67. KRUSKAL, M., MIURA, R.M., GARDNER, C.S. et ZABUSKY, N.L. (1970). *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. V. Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws*, Journal of mathematical Physics **11** 3, 952-960.
 68. LANDOLFFI, G. (2003). *On the Canham-Helfrich membrane model*, J. Phys. A **36**, 4699-4715.
 69. LAX, P.D. (1968). *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure. Appl. Math. **31**, 467-490.
 70. LIPOWSKI, R. et SACKMAN, E. (éditeurs, 1995). *Handbook of Biological Physics, vol. 1, Structure and Dynamics of Membranes*, Elsevier, Amsterdam.

71. LOGAN, J.D. (1977). *Invariant Variational Principles*, Academic Press, New York.
72. MATVEEV, V.B. et SALLI, M.A. (1991). *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Series in Non-linear Dynamics, Springer, Berlin.
73. McCOY, B.M. et WU, T.T. (1973). *The Two-Dimensional Ising Model*, Harvard Univ. Press, Harvard.
74. MISHIMA, T. et IGUCHI, H (2006). *New Axisymmetric Stationary Solutions of Five-dimensional Vacuum Einstein Equations with Asymptotic Flatness*, Phys. Rev. D, **73**, 044030.
75. MOTZ, H., PAVLENKO, V.P. et WEILAND, J. (1980). *Acceleration and slowing down of nonlinear packets in a weakly nonuniform plasma*, Phys. Lett. A **76** 2, 131-133.
76. NELSON, D., PIRAN, T. et WEINBERG, S. (1992). *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces*, World Scientific, Singapore.
77. NIMMO, J.J.C. et FREEMAN, N.C. (1984). *The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in Wronskian form*, J. Phys. A : Math. Gen. **17** 7, 1415.
78. OLVER, P.J. (1993). *Applications of Lie groups to differential Equations*, 2^e édition, Springer-Verlag, New York.
79. OU-YANG, Z., LIU, J. et XIE, Y. (1999). *Geometric Methods in Elastic Theory of Membranes in Liquid Crystal Phases*, World Scientific, Singapore.
80. POLCHINSKI, J. (1992). *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
81. POLCHINSKI, J. et STROMINGER, A. (1991). *Effective String Theory*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1681-1684.
82. POLYANIN, A.D. et ZAITSEV, V.F. (2004). *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton

83. ROGERS, C. et SCHIEF, W. K. (2002). *Backlund and Darboux Transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge University Press, New York
84. ROGERS, C. et SHADWICK, W.F. (1982). *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Academic Press, New York.
85. RUSSELL, J.S. (1844). *Report on waves*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 319-320.
86. SAFRAM, S.A. (2003). *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces and Membranes*, Addison-Wesley, New York.
87. SHIMIZU, K. et ICHIKAWA, Y.H. (1972). *Automodulation of ion oscillation modes in plasma*, J. Phys. Soc. Japan **33**, 789-792
88. SYM, A. (1985). *Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems). Geometric aspects of the Einstein Equations and Integrable systems* (Lecture Notes in Physics **239**), Springer, Berlin, pp. 154-231.
89. TAFEL, J. (1995). *Surfaces in \mathbb{R}^3 with prescribed curvature*, J. Geom. Phys. **17** p.381-390.
90. TALANOV, V.I. (1965). *Self focussing of wave beams in nonlinear media*, JETP Lett. Engl. Transl. **2**, 138-141.
91. TANIUKI, T. et WASHIMI, H. (1968). *Self trapping and instability of hydro-magnetic waves along the magnetic field in a cold plasma*, Phys. Rev. Lett. **21**, 209-212.
92. TSUZUKI, T. (1971). *Nonlinear waves in the Pitaevsky-Gross equation*, J. Low Temp. Phys. **4**, 441-457.
93. WEIERSTRASS, K. (1866). *Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen*, Mathematische Werke **3**, Verlagsbuch-handlung, Hillesheim, p. 219-248.
94. WEISS, J. (1983). *The Painlevé property for partial differential equation. II : Backlund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative*, J. Math. Phys. **24**, 1405-1413.
95. WEISS, J. (1984). *On classes of integrable systems and the Painlevé property*, J. Math. Phys. **25**, 13-24.

96. WHITTAKER, E.T. et WATSON, G.N. (1963). *A course of modern analysis*, 4^e édition, Cambridge university Press, Cambridge.
97. ZABUSKY, N.J. et KRUSKAL, M.D. (1965). *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Physics Rev. Lett. **15**, 240-243.
98. ZAKHAROV, V.E. (1968). *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **2**, 190-194.
99. ZAKHAROV, V.E. et SHABAT, A.B. (1972). *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soy. Phys. JETP **34**, 62-69.
100. ZAKHAROV, V. E. et SHABAT, A. B. (1974). *A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I*, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya **8** 43-53. [Traduction anglaise : Func. Anal. Appl. **8** 226-235].